



BUSCA PELO MÍNIMO RESÍDUO PARA ESCOLHA DO PARÂMETRO DE FORMA UTILIZADO EM RBF'S APLICADAS NO MÉTODO ASSIMÉTRICO LIVRE DE MALHAS (MESHLESS) PARA SIMULAÇÃO DE FLUXO SUBTERRÂNEO

SEARCH FOR MINIMUM RESIDUE TO DETERMINE THE SHAPE PARAMETER IN THE ASYMMETRIC METHOD (MESHLESS) TO SIMULATION OF GROUNDWATER FLOW

Renata Shirley de Andrade Araújo¹; Alessandro de Araújo Bezerra²; Marco Aurélio Holanda de Castro³

Artigo recebido em: 03/01/2016 e aceito para publicação em: 25/08/2016.

DOI: <http://dx.doi.org/10.14295/ras.v30i3.28549>

Resumo: Este trabalho visa à aplicação do método assimétrico numérico livre de malha, um tipo de Meshless, em dois casos de fluxo hídrico subterrâneo para simular a variação da carga hidráulica da região. O modelo desenvolvido utiliza a função de base radial multiquádrica como função de aproximação e uma nova metodologia, a qual utiliza os resíduos do contorno e do domínio para determinar o parâmetro de forma 'c', usado nesse Meshless. A metodologia foi aplicada em dois casos: Para o Caso 1, com solução analítica conhecida, foi possível comparar a solução exata à solução numérica obtida usando a metodologia dos resíduos proposta. O Caso 2 é um cenário real no qual a metodologia foi aplicada para simular o fluxo hídrico subterrâneo de uma pequena região dentro da Bacia Sedimentar do Araripe, situada no Estado do Ceará-Brasil. Nessa região específica a maior parte do abastecimento público de água provém de fontes subterrâneas. No caso 1, os resultados indicaram que o parâmetro 'c' obtido se aproximou do valor ideal. No caso 2, a equipotencial do poço utilizado como referência obteve um erro percentual de aproximadamente 5%.

Palavras-chave: Meshless. Carga hidráulica. Parâmetro de forma e Bacia Sedimentar do Araripe.

Abstract: The main objective of this research is the application of the Meshless numerical method in two cases of groundwater flow to simulate the hydraulic head variations on the region. The model uses the Multiquadrics Radial Basis Functions and a new methodology, which uses the residues of the contour and the domain, to determine the shape parameter 'c' in the Meshless numerical method. The methodology was applied in two cases: For Case 1 the exact solution was known, therefore it was possible to compare the analytical solution with the solution achieved by using the residue methodology proposed. Case 2 is a real case scenario for which the methodology was applied to simulate groundwater flow in a small region in the Araripe Sedimentary Basin, situated in the state of Ceará-Brazil. In this specific region most public water supply comes from groundwater sources. In case 1, the results indicate that 'c' parameter achieved approximate values of the ideal value. In case 2, analyzing the hydraulic head equipotential of the reference point, the percentage of errors was about 5%.

Keywords: Meshless. Hydraulic head. Shape parameter and Araripe Sedimentary Basin.

1 INTRODUÇÃO

A crise hídrica que o país tem enfrentado nos últimos anos repercutiu de maneira a

impulsionar a elaboração de novas técnicas, cujo objetivo é o aproveitamento dos recursos hídricos de forma sustentável.

A demanda por água tem crescido anu-

- 1 Universidade Federal do Ceará (UFC) - Professora Assistente da Universidade Federal do Piauí, Departamento de Recursos Hídricos, Geotecnia e Saneamento Ambiental. Doutora em Engenharia Civil concentração em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará (UFC). E-mail: renatashirley@ufpi.edu.br
- 2 Universidade Federal do Piauí (UFPI) - Professor Assistente da Universidade Federal do Piauí, Departamento de Recursos Hídricos, Geotecnia e Saneamento Ambiental. Doutorando em Engenharia Civil concentração em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará (UFC) E-mail: alessandrobezerra@ufpi.edu.br
- 3 Universidade Federal do Ceará (UFC) - PhD., Drexel University-USA, Professor Titular da Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental. E-mail: marco@ufc.br

almente. Com as reservas superficiais disponíveis ficando cada vez menores, a exploração dos recursos subterrâneos tem se consolidado como uma alternativa viável para abastecimento.

Apesar de não ser uma regra geral, de acordo com Bertolo *et al.* (2015), os reservatórios subterrâneos, geralmente, dispensam a necessidade de uma estação de tratamento com um grande aparato de equipamentos, produtos químicos, manutenção (como lavagens de filtros), além de não gerar resíduos, como o lodo, presente numa estação de tratamento de água convencional, visto que suas águas naturalmente possuem boa qualidade. Além disso, esse tipo de reservatório não apresenta problemas causados por evaporação ou assoreamento.

Por suas próprias características, um aquífero apresenta vantagens para sua utilização como manancial destinado ao abastecimento. Nesse sentido, é importante conhecer a dinâmica que envolve a exploração das águas subterrâneas, uma vez que, conforme Silva *et al.* (2014), os excessos na exploração e falhas de gerenciamento podem interferir gravemente nas reservas existentes, contribuindo, assim, para uma possível crise no abastecimento.

Para Souza e Castro (2013), uma exploração adequada de um aquífero necessita de um estudo prévio sobre o comportamento de alguns parâmetros hidráulicos, como a carga hidráulica do aquífero ou o fluxo hídrico subterrâneo.

Os modelos numéricos têm se constituído como ferramentas de análise em diversos campos da engenharia e como instrumentos de gestão. De acordo com Wendland *et al.* (2013), o desenvolvimento de modelos matemáticos aplicados a estudos teóricos sobre o comportamento das águas subterrâneas atua como um suporte, a fim de minimizar tempo e custos causados por algumas formas de investigação experimental. Para De Paula e Velásquez (2013), um modelo numérico de fluxo subterrâneo permite a simulação das propriedades do aquífero, de modo a reunir informações que auxiliem no planejamento dos recursos hídricos.

Na literatura, constata-se que os métodos das diferenças finitas (MDF) e dos elementos finitos (MEF) são amplamente aplicados na modelagem de fluxo subterrâneo. Ambos os métodos necessitam de nós ou elementos para discretização da malha de trabalho. Como qualquer metodologia possui limitações, a quantidade de elementos utilizados no MEF interfere no tempo computacional e na precisão do modelo (SUCH *et al.*, 2015); (MIDDLETON; JONES; WILSON, 1990). Para Fernando e Hu (2011) a complexidade das equações influencia o trabalho com o MDF. Além disso, segundo Alencar e Wendland (2013), a grande quantidade de pontos discretizados nos MDF e MEF interfere no tempo computacional.

A metodologia livre de malhas, o Meshless, pode servir como uma nova alternativa de trabalho para regiões em que o uso de malhas dificulta a sua representatividade. Por apresentar apenas nós, excluindo a necessidade de elementos ou células, de acordo com Kansa (1990a), não há problemas de conectividade. Existem vários tipos de metodologias livres de malhas desenvolvidas desde o primeiro trabalho conhecido como "*Smooth Particle Hydrodynamics - SPH*" de 1977. De acordo com Liu e Liu (2003), apesar de possuir algumas características semelhantes, essas metodologias diferem na formulação da função de aproximação e do processo de implementação.

Este trabalho tem como objetivo principal gerar um modelo numérico para calcular a variação do potencial hidráulico em dois casos de fluxo subterrâneo (sendo 1 hipotético e 1 real), utilizando o Método Meshless de Colocação Assimétrico Utilizando RBF proposto por Kansa (1990a) e Kansa (1990b) utilizando a função de aproximação multiquádrica, aplicando um método para busca pelo parâmetro de forma (c) ideal.

O método de colocação assimétrico, também conhecido como método de Kansa, foi desenvolvido a partir do trabalho de Hardy (1990), para utilizar as funções multiquádricas e aplicá-las em problemas envolvendo equações diferenciais parciais.

2 METODOLOGIA

2.1 Caracterização dos Casos em Estudo

Para os casos em estudo foram feitas as seguintes considerações para os aquíferos: uma formação praticamente incompressível, ou seja, o tipo de fluxo é permanente, o meio saturado e solo em situação de isotropia. Essas

particularidades foram utilizadas para determinação da equação governante envolvida no modelo.

O primeiro caso apresentado é hipotético, cuja aplicação está direcionada para validação do modelo proposto. Esse caso de estudo consiste em uma região retangular de 5m de largura e 20m de comprimento. As condições de contorno do problema estão dispostas conforme mostra a figura 1.

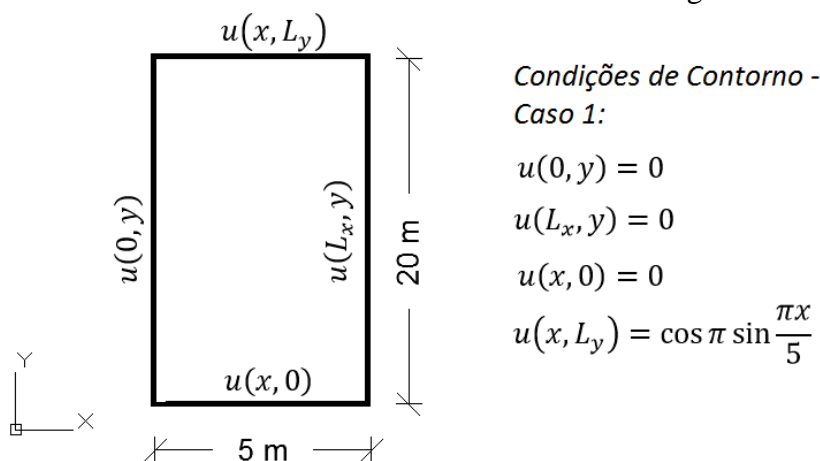


Figura 1 – Região de trabalho e condições de contorno: Caso 1
Figure 1 – Work region and boundary conditions: Case 1

É importante esclarecer que o caso 1 com suas respectivas condições de contorno possui solução exata para a equação governante que atua no problema. Isso permite uma comparação dessas soluções com os resultados de carga hidráulica obtidos pelo modelo numérico proposto.

O segundo caso corresponde a uma aplicação do modelo numérico, o mesmo utilizado no caso 1, em uma pequena área dentro da Bacia Sedimentar do Araripe para verificar o comportamento da carga hidráulica na região.

A escolha da Bacia Sedimentar do Araripe deveu-se a dois critérios:

- a) Quantidade de dados disponíveis para realização do trabalho;
- b) A importância do recurso subterrâneo para o abastecimento da região.

Segundo Veríssimo e Aguiar (2005), a Bacia Sedimentar do Araripe possui uma área de aproximadamente 11.000km², englobando

parte dos Estados do Ceará, Pernambuco e Piauí, é constituída pela Chapada do Araripe e por planícies que rodeiam a chapada com desníveis que chegam a 400m. A figura 2 apresenta um mapa de localização da Bacia.

O estudo concentrou-se no Cariri cearense, mais precisamente entre os municípios de Juazeiro do Norte e Crato. Segundo Veríssimo (1999), a região do Cariri possui os melhores aquíferos do Estado do Ceará que, devido a sua capacidade e a boa qualidade, a maioria dos municípios da região é abastecida pela água dos poços ou de fontes da região. De acordo com o Serviço Geológico do Brasil - CPRM (1998), toda a população urbana de Juazeiro do Norte é abastecida com águas provenientes de poços (21 tubulares e 1 amazonas), os dados são da Companhia de Água e Esgoto do Ceará – CAGECE. Isso confirma a importância da região estudada no caso 2.

Busca pelo mínimo resíduo para escolha do parâmetro de forma utilizado em RBF's aplicadas no método assimétrico livre de malhas (MESHLESS) para simulação de fluxo subterrâneo

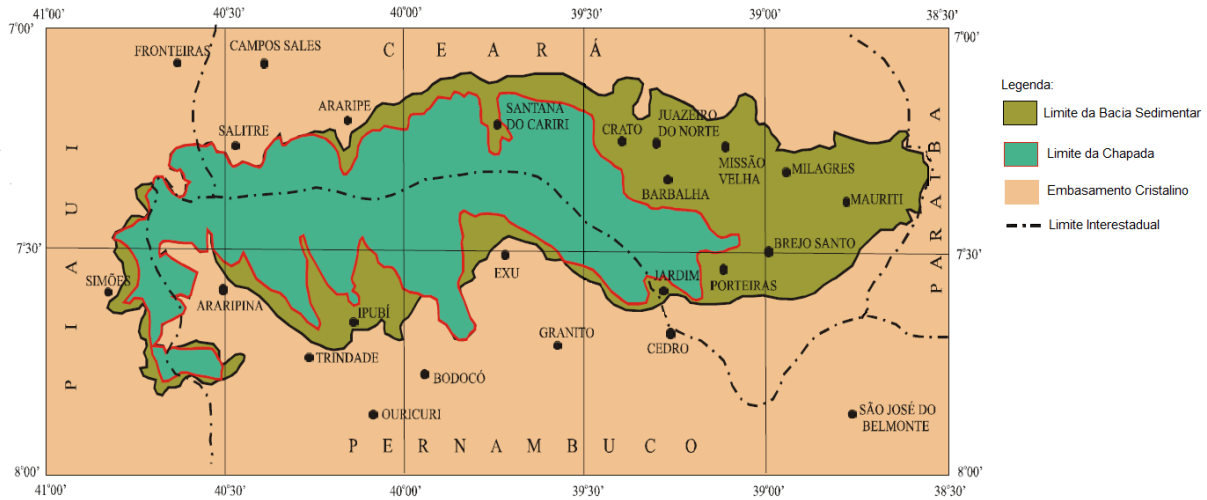


Figura 2 – Mapa de localização da Bacia. (Modificado de Veríssimo e Aguiar, 2005)
Figure 2 – Location map of Basin. (Modified from Veríssimo and Aguiar, 2005)

A zona de trabalho do caso 2, ilustrada na figura 3, é composta pelos poços 52, 56, 64, 67 e 68 (COGERH, 2014), delimitada pelo quadrilátero vermelho em destaque, com uma área de aproximadamente 35 km². Os poços

foram devidamente alocados com suas respectivas coordenadas com o auxílio da plataforma GoogleEarth com o objetivo de exemplificar a distribuição espacial dos poços.

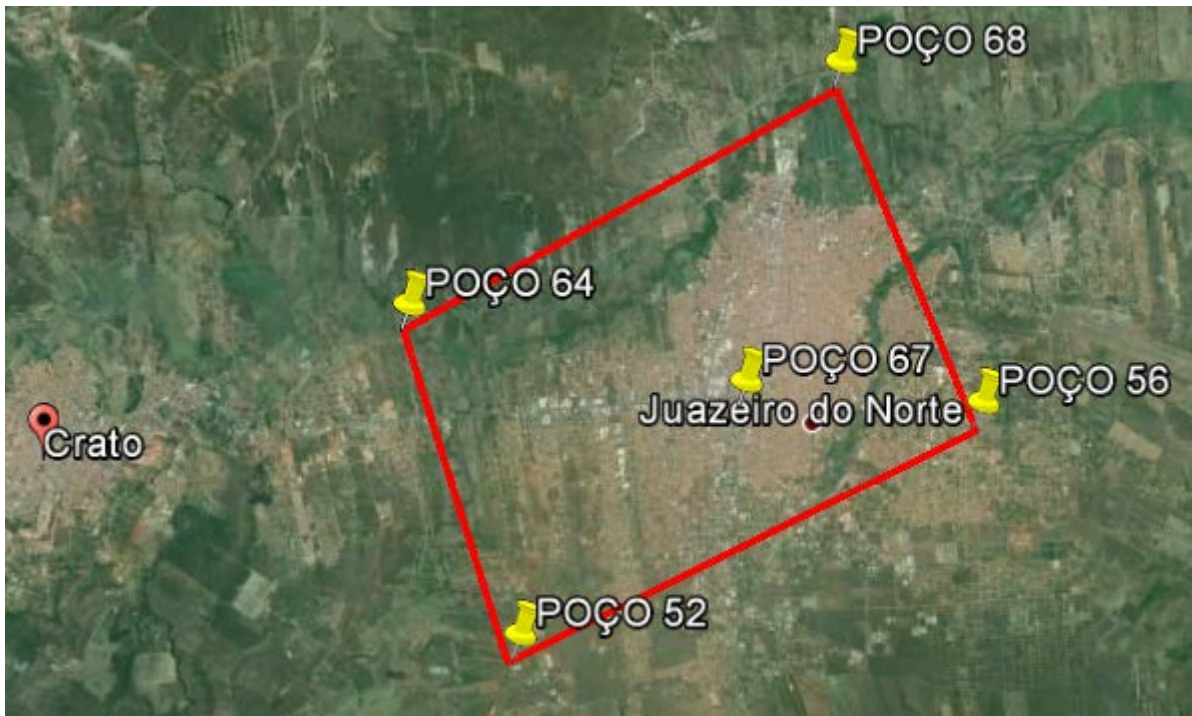


Figura 3 – Zona de trabalho – Caso 2
Figure 3 – Work zone – Case 2

A identificação desses poços foi obtida por meio do boletim de monitoramento dos poços com *datalogger* no Cariri – CE realizado pela Companhia de Gestão dos Recursos

Hídricos – COGERH entre janeiro e dezembro de 2013. A tabela 1 apresenta algumas características dos cinco poços apresentados.

Tabela 1 – Características gerais – Caso 2
Table 1 – General characteristics – Case 2

Dados dos Poços		
Poço nº	Cota do Terreno (m)	Carga Hidráulica (m)
52	455	412,00
56	417	389,40
64	410	404,60
67	445	384,57
68	388	377,81

Modificado de COGERH (2014)
 Modified of COGERH (2014)

Com as informações de cada poço, foi realizada uma linearização dos valores de carga hidráulica ao longo do perímetro destacado na figura 3, entre os poços 52, 56, 64 e 68, com o objetivo de definir as condições de contorno do caso 2 para serem utilizadas durante a aplicação do modelo numérico.

O poço 67 foi utilizado como referência para comparação dos resultados obtidos pelo modelo numérico, uma vez que não se dispõe da solução exata para este caso.

2.2 Equação de Fluxo no Subterrâneo

Baseada na Lei de Darcy e na Lei da Conservação de Massa, a equação fundamental para fluxo em aquíferos tridimensionais é representada pela equação 1:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + F = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

Em que o K_j é a condutividade hidráulica na direção j do fluxo expressa em (m/s); h representa a carga hidráulica (m); F é um termo que pode estar associado a uma fonte de recarga ou extração (1/s); S_s é o coeficiente de armazenamento específico e t é o tempo (s). Para o desenvolvimento deste trabalho, admitiu-se que não existe recarga ou extração, desse modo $F = 0$. Como o regime considerado é permanente e o meio é saturado, então a equação (1) se reduz à:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Considerando a isotropia no aquífero, ou seja, a condutividade hidráulica é constante em todas as direções ($K_x = K_y = K_z$) e um fluxo bidimensional, a equação (2) transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

A equação (3) é conhecida como Equação de Laplace e será a equação governante envolvida no modelo. O modelo numérico livre de malha foi aplicado na equação (3) para, baseado nas condições de contorno impostas, calcular as cargas hidráulicas na área dos casos em estudo.

2.3 Modelo Numérico

O modelo numérico adotado se baseia em um tipo de Meshless, o método de Kansa, utilizando funções de base radial (RBF), em inglês “*Radial Basis Functions*”, para resolver a função de aproximação mostrada na equação (4), e encontrar uma solução numérica para o problema envolvido. O modelo foi desenvolvido com o auxílio da plataforma Scilab (versão 5.5.2).

$$u(x, y, c) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(r_j, c) \quad (4)$$

Onde ϕ corresponde a função de base radial (RBF) adotada; c é o parâmetro de forma; r_j é a distância entre o nó 'j' e um nó central (equação 5); n é o número de nós presentes na discretização e o escalar λ_j é encontrado através da solução de um conjunto de equações lineares.

$$r_j = \sqrt{(x_{1,i} - x_{1,j})^2 + \dots + (x_{n,i} - x_{n,j})^2} \quad (5)$$

No meshless o domínio e o contorno são representados apenas por nós, dispensando o uso de malhas. Entre os tipos mais comuns de RBF, conforme Baxter (1992); Franke (1982); Franke e Schaback (1998); Ferreira *et al.* (2009) e Hardy (1978), estão: a multiquádrica, a multiquádrica inversa, a gaussiana e a *thin plate spline*.

Segundo Kansa (1990a), a função de aproximação multiquádrica requer um menor número de pontos que no MEF ou MDF, isso contribui para uma resposta computacional mais eficiente, o que justifica a adoção da RBF multiquádrica. A equação (6) mostra a forma dessa RBF.

$$\phi(r, c) = \sqrt{r^2 + c^2} \quad (6)$$

Uma equação diferencial pode ser representada por seus operadores lineares L e B, onde:

$$L[u](x, y) = f(x, y)/x, y \in \text{domínio} \quad (7)$$

$$B[u](x, y) = g(x, y)/x, y \in \text{contorno} \quad (8)$$

Em que $f(x, y)$ é uma função baseada em pontos do domínio e $g(x, y)$ é uma função baseada em pontos do contorno. Substituindo as equações (7) e (8) na equação (4), a solução

está na resolução do sistema de matrizes mostrado na equação (9).

$$\lambda_j = A^{-1}w \quad (9)$$

Onde A^{-1} é a matriz inversa de A, sendo A e w representados, respectivamente, por:

$$A = \begin{pmatrix} L[\phi] \\ B[\phi] \end{pmatrix} \text{ e } w = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Obtido o valor de λ_j e definindo a função de base radial ϕ (equação 6), através da equação (4), pode-se calcular o valor da solução numérica para cada nó do domínio.

Para Menescal (2008), o parâmetro de forma 'c' é um elemento importante na determinação da solução aproximada e, por ser um elemento, cujo valor é estimado, a forma adequada para obtenção desse parâmetro poderia ser uma restrição para aplicação do método.

Uma metodologia, para encontrar um valor de 'c' que se aproxime do parâmetro ideal, ou seja o parâmetro de forma que gera o melhor resultado possível, foi desenvolvida e inserida no modelo. Essa abordagem está baseada na utilização dos resíduos gerados no contorno e no domínio, como mostrado na equação (11), a fim de minimizar erros gerados na solução.

$$RES_T = RES_D + RES_C \quad (11)$$

onde RES_T é o resíduo total gerado; RES_D é o resíduo do domínio e RES_C é o resíduo do contorno.

$$RES_D = L[u(x, y)] - f(x, y) \quad (12)$$

$$RES_C = B[u(x, y)] - g(x, y) \quad (13)$$

Substituindo a equação (4) nas equa-

ções (12) e (13), respectivamente, encontram-se os resíduos do domínio e do contorno utilizados na equação (11).

A metodologia desenvolvida faz uma busca, por uma faixa de valores de 'c' indicada na rotina, pelo valor da variável 'c' que gera o menor valor de RES_T , o qual passa a se chamar 'c' ótimo e corresponde ao parâmetro de forma utilizado para gerar os resultados finais. Dessa forma, a metodologia propõe que o menor valor de resíduo total gerado para todos os nós corresponde ao melhor resultado numérico com a utilização da RBF multiquádrica no Meshless.

A faixa de valores para 'c' utilizada nos casos apresentados inicia com 0,1 e termina com 10, variando 0,1 desde o valor inicial até o valor final. Adotou-se essa faixa limite, uma vez que, analisados os trabalhos de Fasshauer (2002) e Rodrigues *et al.* (2012), observou-se a adoção de pequenos valores para a variável do parâmetro de forma com resultados consistentes.

O modelo calcula o valor de 'c' para o menor valor de resíduo total, de resíduo do domínio, de resíduo do contorno e de erro mínimo. O erro é calculado pelo módulo da diferença entre a solução exata (quando existir) e a numérica para o qual existe um valor de 'c' correspondente. O valor de 'c' relacionado ao erro mínimo é obtido pela comparação entre as duas soluções. Para a mesma faixa de 'c' onde são calculados os resíduos, são calculados os erros. Assim, também é possível obter o parâmetro de forma que gera o menor erro. É importante ressaltar que o erro não é utilizado como elemento para escolha do parâmetro de forma 'c' adotado pelo modelo, mas como uma ferramenta para análise dos resultados dos casos em que há solução exata para verificar o comportamento do método adotado.

Para melhor interpretação do método, é importante comparar cada um dos três resíduos com o erro, verificando a influência de cada um no resultado final. A fundamentação

proposta é que o 'c' ótimo do resíduo total se aproxime do 'c' ótimo calculado para o erro mínimo, gerando a melhor solução numérica possível com a utilização do método, ou seja, gera a solução numérica mais próxima da solução exata, funcionando como uma ferramenta para validação do modelo. Para o caso 1, que dispõe de solução analítica, as duas ferramentas foram utilizadas. A primeira é a busca pelo 'c' que gera o menor resíduo total, ou seja, foram utilizadas apenas soluções numéricas na busca do parâmetro de forma que gerasse o mínimo RES_T . E a segunda que calcula o erro mínimo, quando a solução exata foi comparada à solução numérica na busca pelo parâmetro de forma que resultasse no menor erro. No caso 2, como não se dispõe da solução exata, aplicou-se puramente a metodologia dos resíduos totais para determinação do parâmetro de forma.

A simulação do modelo numérico para o caso 1 foi dividida em três cenários: o primeiro cenário apresenta a área estudada numa divisão composta por 9 nós distribuídos, o segundo cenário distribui 25 nós e o terceiro cenário apresenta 36 nós. Já para o caso 2, além dos três cenários propostos anteriormente, foram acrescentadas 3 novas simulações com 100, 400 e 625 nós. O espaçamento entre os nós presentes em todos os cenários é uniformemente distribuído.

3 RESULTADOS

3.1 Primeiro Caso (Hipotético)

a) Cenário 1:

Nesta simulação o modelo proposto foi aplicado a nove nós, utilizando as condições de contorno propostas. Nas figuras 4 e 5 são apresentadas, respectivamente, as equipotenciais geradas pelo modelo e o gráfico de resíduos mostrando o comportamento durante a busca pelo parâmetro de forma 'c'.

Busca pelo mínimo resíduo para escolha do parâmetro de forma utilizado em RBF's aplicadas no método assimétrico livre de malhas (MESHLESS) para simulação de fluxo subterrâneo

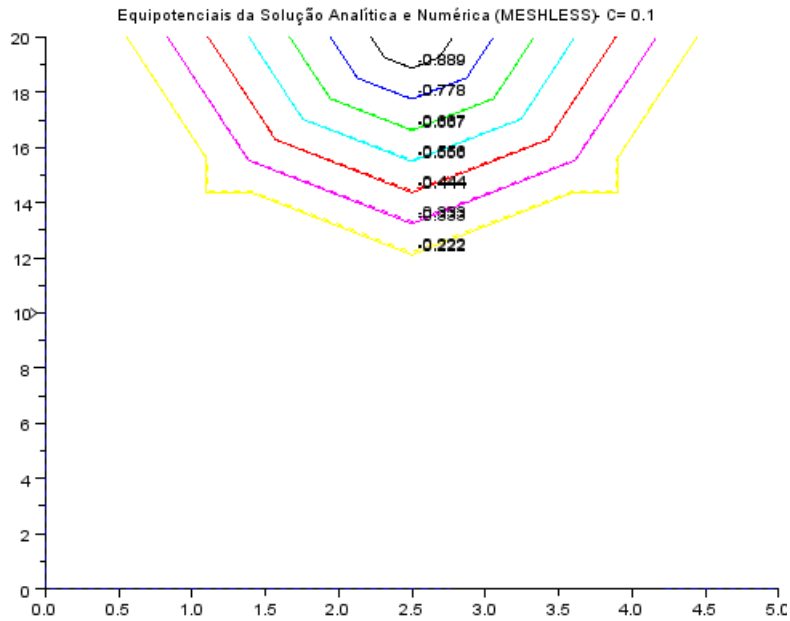


Figura 4 – Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada)
Figure 4 – Equipotential of numerical solution (solid line) and of exact solution (dashed line)

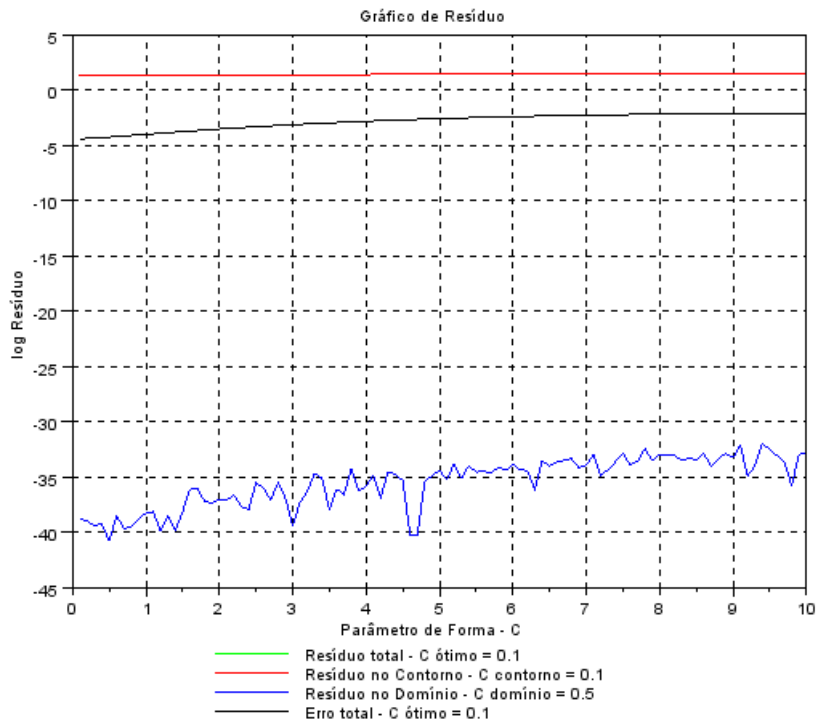


Figura 5 – Gráfico dos resíduos (escala logarítmica)
Figure 5 – Graph of residues (logarithmic scale)

Tabela 2 – Resultados cenário 1 – Caso 1
Table 2 – Scenario 1 results – Case 1

Cenário 1 - 9 Nós		
Carga Hidráulica (m)		
Solução Analítica	Solução Numérica Caso 1	Erro Caso 1
0,00	0,00	0,00
1,00	1,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,01	0,01
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00

As equipotenciais das soluções numérica e exata estão quase sobrepostas, o que indica uma boa convergência entre os valores obtidos pelo modelo em relação à solução ideal do problema. Isso pode ser confirmado observando que o parâmetro de forma calculado pelo método foi igual a 0,1, o qual é igual ao 'c' do erro total, ou seja, é a melhor solução possível obtida pela aplicação do método. A tabela 2 apresenta os valores para ambas as soluções.

b) Cenário 2:

As equipotenciais da figura 6 foram calculadas em função dos valores obtidos em cada um dos 25 pontos utilizados nesse cenário. Dada a maior quantidade de pontos, houve um leve distanciamento entre as equipotenciais das soluções numérica e exata, no entanto, o aspecto visual das linhas suavizou em relação ao cenário 1.

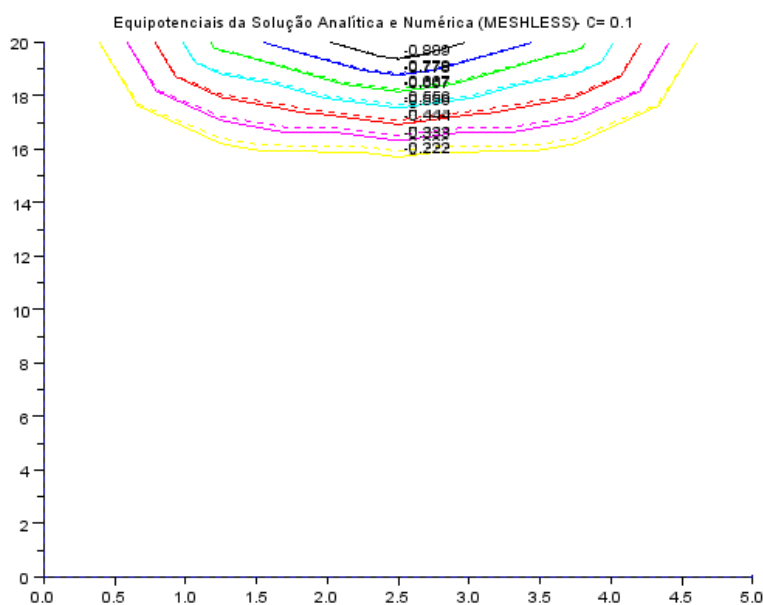


Figura 6 – Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada)
Figure 6 – Equipotential of numerical solution (solid line) and of exact solution (dashed line)

Busca pelo mínimo resíduo para escolha do parâmetro de forma utilizado em RBF's aplicadas no método assimétrico livre de malhas (MESHLESS) para simulação de fluxo subterrâneo

Nesse cenário o parâmetro de forma calculado não sofreu nenhuma mudança permanecendo o valor de 0,1, que é o mesmo valor encontrado para o 'c' do erro total. A ta-

bela 3 mostra os valores numéricos e analíticos para os 25 pontos calculados pela metodologia, sendo que a maior diferença foi de 0,05 m.

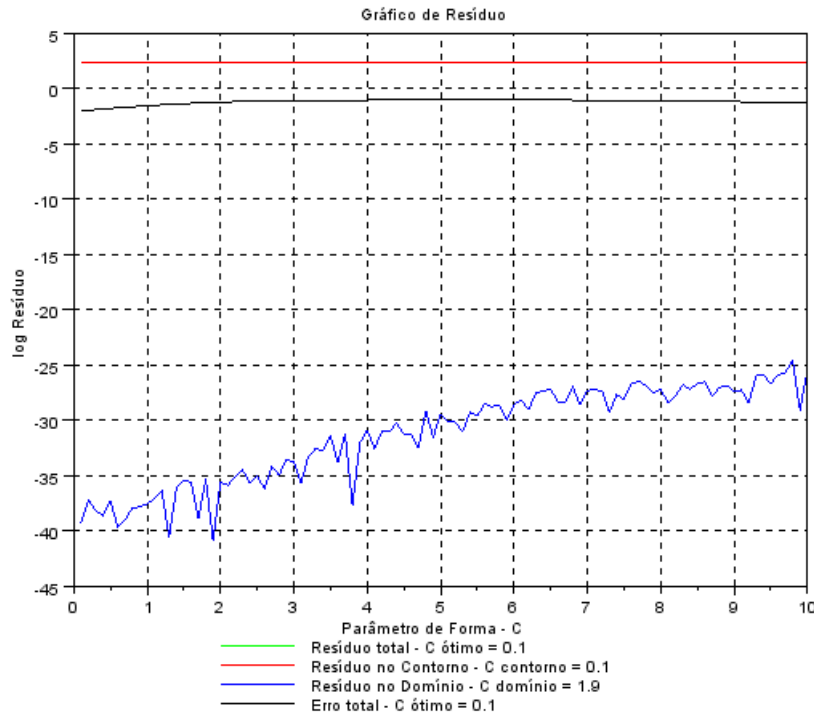


Figura 7 – Gráfico dos resíduos (escala logarítmica)
Figure 7 – Graph of residues (logarithmic scale)

Tabela 3 – Resultados cenário 2 – Caso 1
Table 3 – Scenario 2 results – Case 1

Cenário 2 - 25 Nós			Cenário 2 - 25 Nós		
Solução Analítica	Carga Hidráulica (m)		Solução Analítica	Continuação	
	Solução Numérica	Erro		Carga Hidráulica (m)	Erro
	Caso 1	Caso 1		Caso 1	Caso 1
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,71	0,71	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,71	0,71	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,03	0,07	0,04	0,00	0,00	0,00
0,04	0,09	0,05	0,00	0,00	0,00
0,03	0,07	0,04	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

c) Cenário 3:

A última simulação para o caso 1 possui 36 nós distribuídos na área da região. As figuras 8 e 9 apresentam, respectivamente, as equipotenciais e a variação dos resíduos gerados. Como é possível observar na figura não houve grandes mudanças na distância entre as duas soluções (numérica e analítica), princi-

palmente na zona próxima a condição de contorno $u(x, L_y)$ (linhas azul marinho e verde), em que a carga hidráulica varia em função do eixo x, ou seja, ela não possui um valor fixo.

O parâmetro de forma calculado também se manteve, assim como o parâmetro de forma para o erro total. Na tabela 4 os resultados para os 36 nós da simulação indicam um erro máximo de 0,06 m.

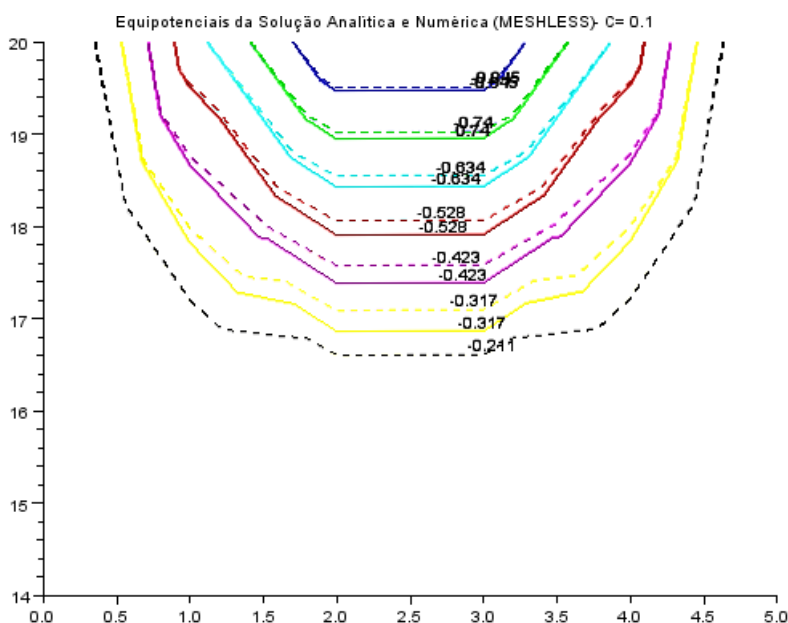


Figura 8 – Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada)
Figure 8 – Equipotential of numerical solution (solid line) and of exact solution (dashed line)

Pelos dados apresentados, é possível perceber que o modelo representou bem as condições de contorno impostas, mostrando resultados de carga hidráulica próximos ou

iguais à solução exata do problema. Esses resultados foram importantes, pois possibilitaram a aplicação do modelo ao caso 2.

Busca pelo mínimo resíduo para escolha do parâmetro de forma utilizado em RBF's aplicadas no método assimétrico livre de malhas (MESHLESS) para simulação de fluxo subterrâneo

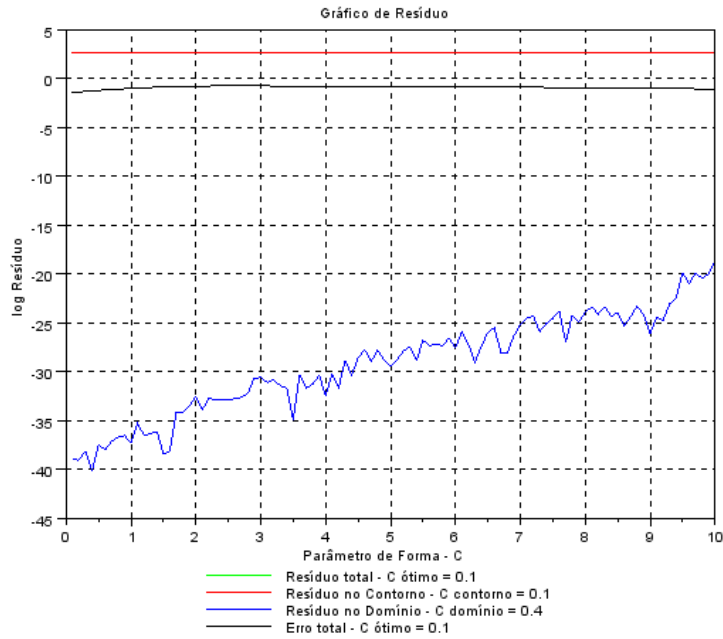


Figura 9 – Gráfico dos resíduos (escala logarítmica)

Figure 9 – Graph of residues (logarithmic scale)

Tabela 4 – Resultados cenário 3 – Caso 1

Table 4 – Scenario 3 results – Case 1

Cenário 3 - 36 Nós			Cenário 3 - 36 Nós		
Carga Hidráulica (m)			Carga Hidráulica (m)		
Solução Analítica	Solução Numérica Caso 1	Erro Caso 1	Solução Analítica	Solução Numérica Caso 1	Erro Caso 1
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,59	0,59	0,00	0,00	0,00	0,00
0,95	0,95	0,00	0,00	0,00	0,00
0,95	0,95	0,00	0,00	0,00	0,00
0,59	0,59	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,05	0,09	0,04	0,00	0,00	0,00
0,08	0,14	0,06	0,00	0,00	0,00
0,08	0,14	0,06	0,00	0,00	0,00
0,05	0,09	0,04	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

3.2 Segundo Caso (Real)

Neste item, são mostrados os resultados da aplicação do modelo em uma região da Bacia Sedimentar do Araripe. Nesse caso, além dos três cenários de 9, 25 e 36 nós ou pontos, foram adicionados mais três com 100, 400 e 625 nós. O objetivo é verificar a influência da quantidade de nós no resultado final.

Como se trata de um caso real, utili-

zou-se a carga hidráulica medida do poço 67 como fator de comparação dos resultados.

a) Cenário 1:

A figura 10 apresenta as equipotenciais de carga hidráulica e o gráfico de resíduos para os nove pontos distribuídos na região de trabalho.

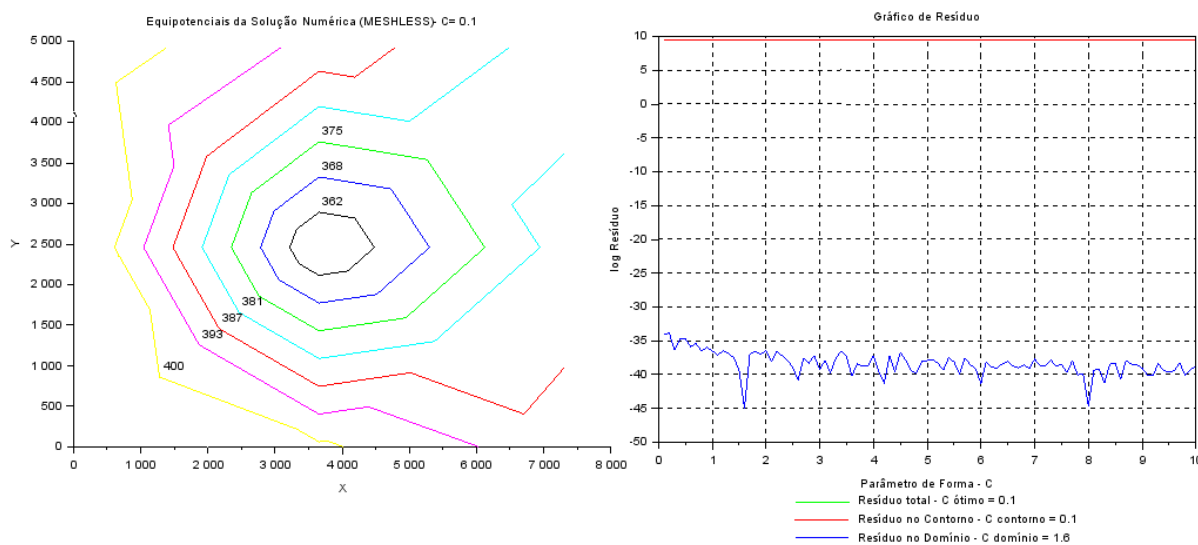


Figura 10 – Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 9 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (escala logarítmica) (lado direito)

Figure 10 – Equipotential of hydraulic head with nine points (on the left) and graph of residues (logarithmic scale) (on the right)

As equipotenciais representaram adequadamente as condições de contorno dadas, uma vez que ao se colocar os quatro poços dentro do gráfico das equipotenciais, seguindo suas coordenadas, as linhas equipotenciais próximas correspondem a uma zona que engloba o valor de carga hidráulica real dos poços. O valor do parâmetro de forma ‘c’ calculado pelo método foi igual a 0,1.

Nesse cenário os poços 52 e 64, cujas cargas hidráulicas são, respectivamente, 412,0m e 404,6m, estão situados numa zona acima da equipotencial 400m, as cargas hidráulicas crescem seguindo o sentido acima dessa equipotencial. O poço 56, com carga hidráulica de 389,4m, situa-se na região entre as zonas de equipotenciais 387m e 393m. Já o

poço 68, com carga hidráulica de 377,8m, situa-se na região entre as zonas de equipotenciais 375m e 381m. Todos os poços estão dentro de uma zona que engloba o valor real correspondente a sua carga hidráulica.

A disposição das equipotenciais 375 (verde), 368 (azul marinho) e 362 (preta) indica que existe um corpo hídrico na região. Isso é fato, pois além dos quatro poços existe o poço 67 localizado no interior da região de estudo.

Localizando o poço 67 no gráfico das equipotenciais da figura 10, sua posição estaria sobreposta a equipotencial 368m, assim, sua carga hidráulica calculada pelo método seria igual a aproximadamente 368m. A carga hidráulica real do poço 67 é 384,57m.

A lógica do método aplicado é realizar uma simulação para determinar o comportamento da carga hidráulica na região baseado em alguns dados de medição, como qualquer método numérico o valor não é exato, mas aproximado. Considerando que o erro encontrado entre o valor da carga hidráulica real e o valor obtido pelo método nesse cenário foi aproximadamente de 4,3%, é possível afirmar

que a metodologia aplicada fez representação eficiente da região.

b) Cenário 2:

A divisão em vinte e cinco nós gerou as equipotenciais e resíduos mostrados na figura 11. Através do método, o parâmetro de forma 'c' obteve o mesmo valor do cenário anterior de 0,1.

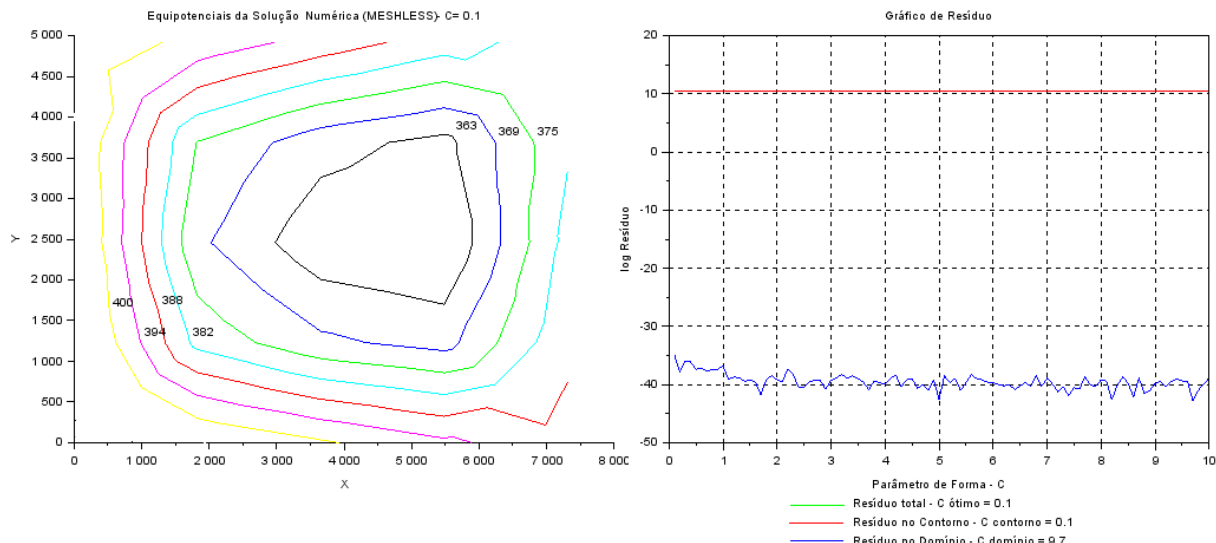


Figura 11 – Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 25 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (escala logarítmica) (lado direito)

Figure 11 – Equipotential of hydraulic head with 25 points (on the left) and graph of residues (logarithmic scale) (on the right)

O sentido do fluxo hídrico encontrado no cenário 2 foi o mesmo encontrado no cenário 1, entretanto, devido ao aumento do número de nós no interior da região de trabalho, foram encontrados mais nós com carga hidráulica de menor valor, o que gerou uma maior expansão superficial da equipotencial de menor valor.

Os poços 52 (carga hidráulica de 412,0m) e 64 (carga hidráulica de 404,6m) continuam nas zonas de equipotencial acima dos 400m. Para o poço 56 (carga hidráulica de 389,4m) os limites de sua zona passaram para as equipotenciais 388m e 394m, ou seja, aumentaram em 1m. O poço 68 (carga hidráulica de 377,8m) está na zona entre as linhas 375m e 382m, sendo que nesse apenas o limite superior variou em 1m. Assim, percebe-se que os quatro poços de carga hidráulica conhecida continuam atendendo às condições de con-

torno.

Essas variações não implicam no resultado, apenas na nova distribuição devido ao aumento da quantidade de novos nós, cada um como um novo valor de carga hidráulica, e por isso existem as variações.

O poço de observação 67 nesse cenário está situado na zona entre as equipotenciais 363m e 369m, cujo valor interpolado indica uma carga hidráulica de 364,5m, o que corresponde a um erro de aproximadamente 5,2%.

c) Cenário 3:

Os 36 nós distribuídos geraram o gráfico de equipotenciais mostrado na figura 12. O parâmetro de forma continuou igual a 0,1, como mostra o gráfico de resíduos.

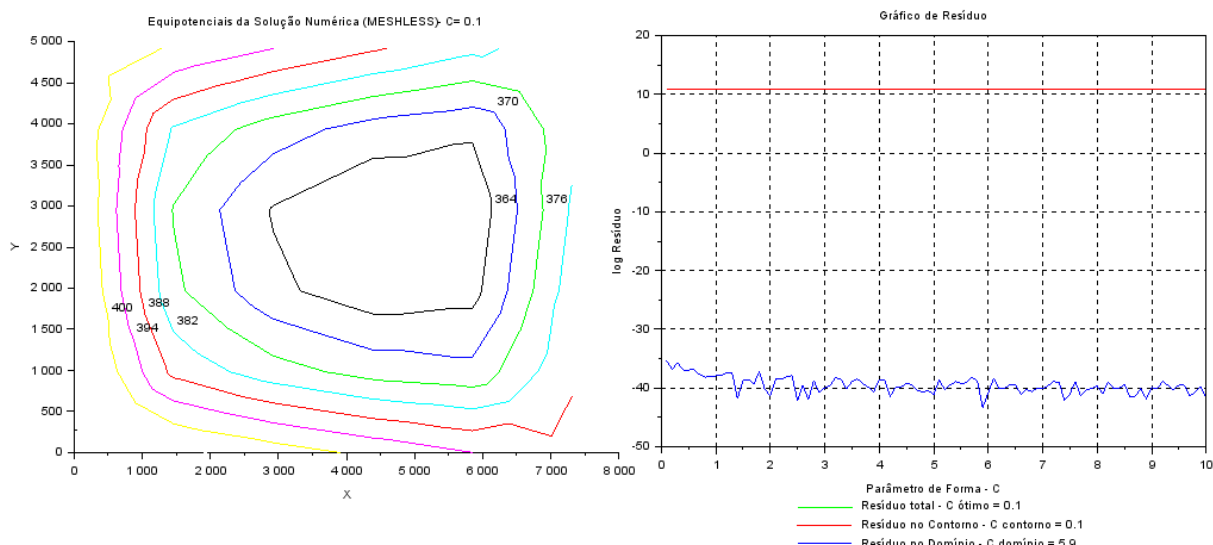


Figura 12 – Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 36 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (escala logarítmica) (lado direito)

Figure 12 – Equipotential of hydraulic head with 36 points (on the left) and graph of residues (logarithmic scale) (on the right)

Como a variação no número de pontos foi pequena, as zonas equipotenciais dos quatro poços mantiveram-se as mesmas, com exceção do poço 68 (carga hidráulica de 377,8m), cuja zona ficou entre as linhas 376m e 382m.

Para o poço 67 a carga hidráulica encontrada foi igual a 364m, o que gerou um erro de 5,3% em relação à carga hidráulica medida.

A partir do cenário 4, a quantidade de nós foi aumentada consideravelmente com a finalidade de verificar qual o comportamento das equipotenciais e da carga hidráulica do poço 67 em relação aos cenários anteriores.

Com 100 nós distribuídos, o gráfico das equipotenciais mostrado na figura 13, possui um formato semelhante, sendo que as linhas foram atenuadas e agora possuem uma forma mais curvilínea.

c) Cenário 4:

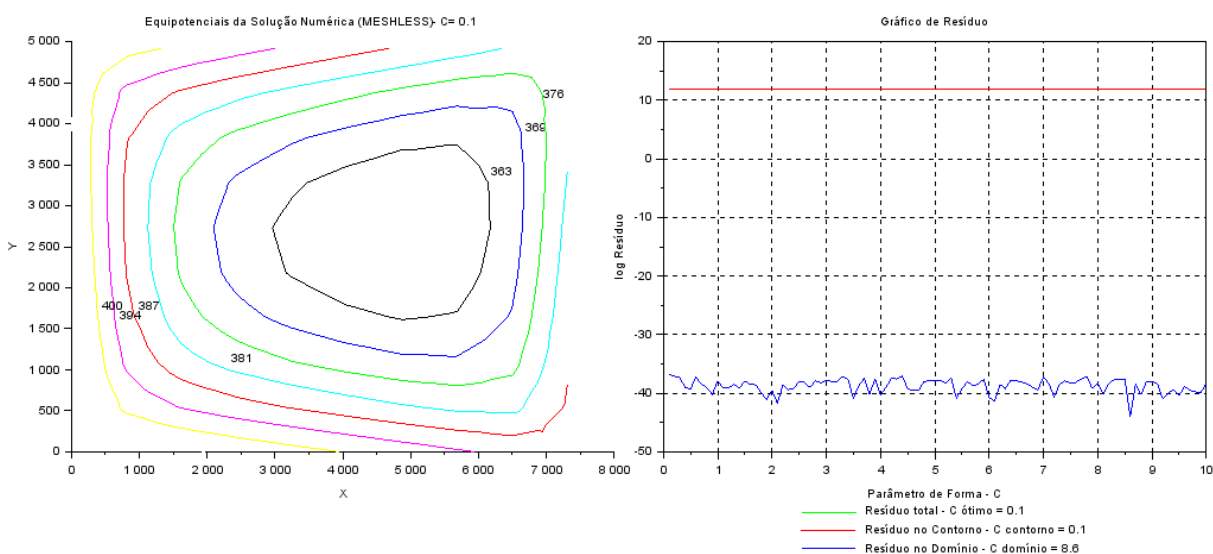


Figura 13 – Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 100 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (escala logarítmica) (lado direito)

Figure 13 – Equipotential of hydraulic head with 100 points (on the left) and graph of residues (logarithmic scale) (on the right)

As zonas de localização foram modificadas apenas para os poços 56 e 68. O poço 56 ficou situado entre as linhas equipotenciais de carga hidráulica 387m e 394m. Já o poço 68 localiza-se entre as linhas 381m e 376m. Em ambas as situações, é possível notar que ocorreu uma variação de 1m nos limites iniciais em cada zona. Mais uma vez, essa variação é explicada devido ao aumento da quantidade de nós utilizados para representar a região.

A carga hidráulica calculada para o

poço 67 foi aproximadamente igual a 363m, o que gera um erro em torno dos 5,6%.

e) Cenário 5:

A figura 14 mostra as equipotenciais e os resíduos gerados nesta simulação com 400 nós. O valor da variável 'c' encontrada pelo método e utilizada na metodologia obteve um valor de 0,1.

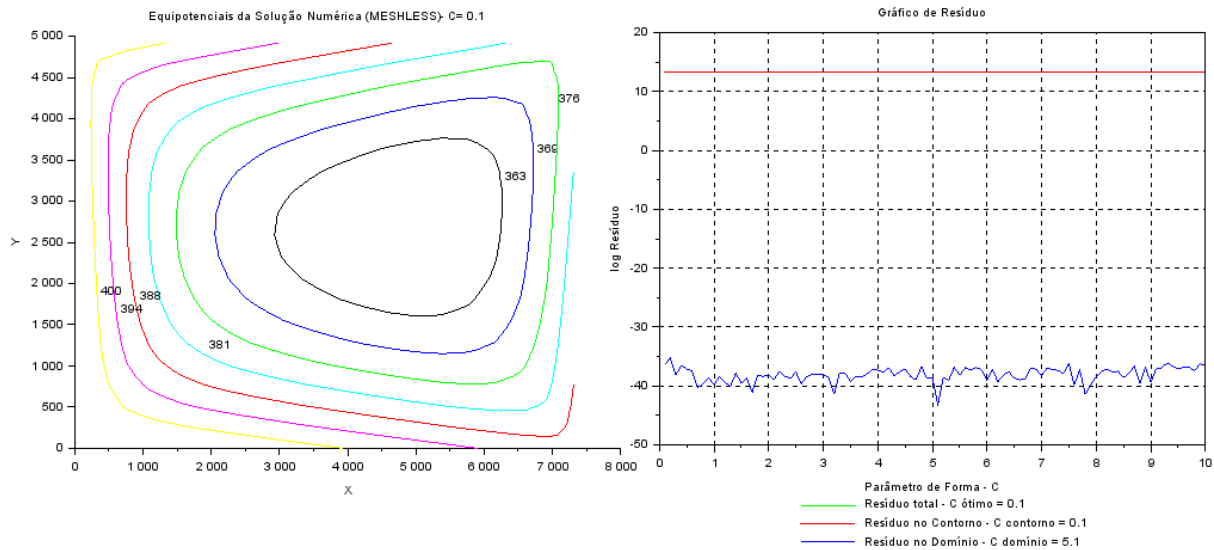


Figura 14 – Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 400 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (escala logarítmica) (lado direito)

Figure 14 – Equipotential of hydraulic head with 400 points (on the left) and graph of residues (logarithmic scale) (on the right)

Nesse cenário praticamente não houve mudança nas linhas equipotenciais geradas em relação ao cenário 4. Os valores numéricos não sofreram alteração, a disposição das linhas continuou como nas simulações com menos nós, exceto pelo aspecto visual das equipotenciais, em que as suas curvas ficaram mais suaves em relação aos cenários anteriores.

Sem sofrer variações, a carga hidráulica do poço 67 continuou em 363m, ou seja, o erro associado também continua de 5,6%.

f) Cenário 6:

Nesta última simulação, a região teve

625 nós utilizados para construir sua representação. Na figura 15, observam-se as equipotenciais e o gráfico dos resíduos, bem como, o valor de 0,1 para a variável 'c'.

Em relação ao cenário 5, não houve alterações, as equipotenciais geradas com 625 nós são praticamente iguais às equipotenciais geradas com 400 nós. Quando comparado ao cenário 4, o que pode ser notado é uma mudança estética na apresentação das equipotenciais.

Dessa maneira, os valores de carga hidráulica para o poço 67 e o erro correspondente permaneceram inalterados.

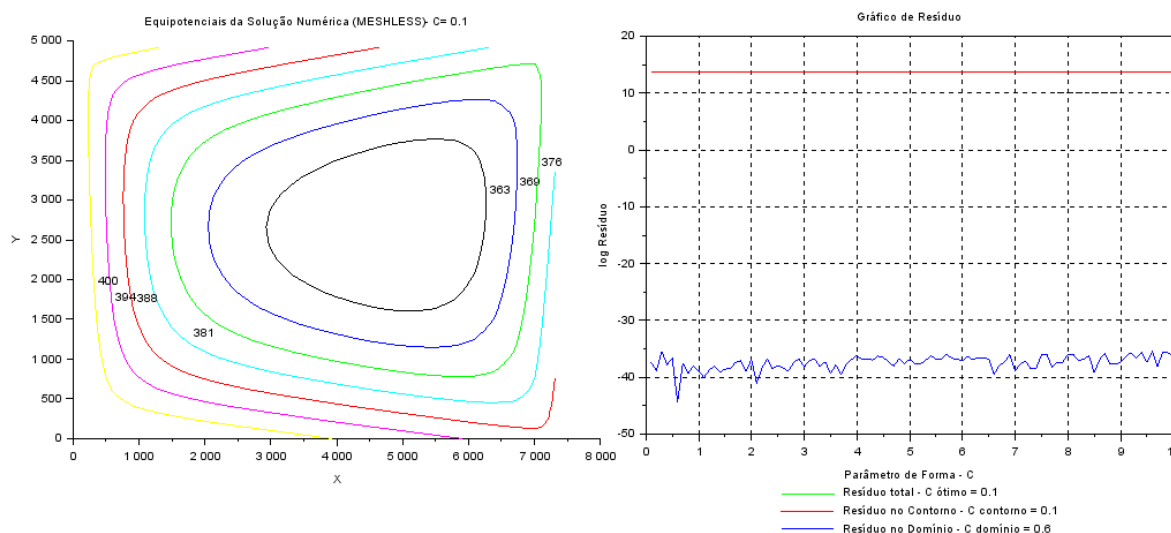


Figura 15 – Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 625 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (escala logarítmica) (lado direito)

Figure 15 – Equipotential of hydraulic head with 625 points (on the left) and graph of residues (logarithmic scale) (on the right)

4 CONCLUSÕES

Para o caso 1 (hipotético), em todos os três cenários simulados, o valor de ‘c’ encontrado pelo método proposto, buscando o menor resíduo total, foi o mesmo valor de ‘c’ quando a solução numérica foi comparada à solução exata, sendo obtido o menor erro. Dessa maneira, se o valor do ‘c’ proposto pelo método, fazendo uso dos resíduos é igual ao ‘c’ fazendo uso da solução exata, então se pode afirmar que o modelo proposto encontrou o melhor resultado possível para o método livre de malha apresentado.

Os resultados numéricos encontrados para o caso 1, através da metodologia livre de malha utilizando a RBF multiquádrica com a busca pelo parâmetro de forma por meio do menor resíduo, aproximaram-se bastante dos resultados obtidos com o uso da solução exata.

As equipotenciais geradas pelo modelo no caso 1 obtiveram resultados semelhantes aos cenários 2 (25 nós) e 3 (36 nós), entretanto, percebe-se pequena diferença em relação ao cenário 1 (9 nós). Isso mostra que o método pode ser utilizado com um pequeno número de nós, mas é necessário atentar para que a quantidade de nós represente suficientemente a região.

No caso 2, aplicado em uma pequena

região da Bacia sedimentar do Araripe, os resultados para os três primeiros cenários de 9, 25 e 36 nós mostraram que o erro associado à carga hidráulica do poço 67 foi igual a 4,3%, 5,2% e 5,3%, respectivamente. Entretanto, nas três simulações com 100, 400 e 625 nós o erro permaneceu constante em 5,6% e as linhas equipotenciais também não se modificaram.

No decorrer das simulações no caso 2, pode-se perceber que o aumento no número de pontos na região de trabalho não diminuiu o erro de cálculo, mas ajusta as equipotenciais de forma mais adequada na superfície estudada. Além disso, apesar do erro da carga hidráulica do poço 67 ter crescido em 1,5%, não significa que o erro tenha aumentado para toda região de trabalho, uma vez que as regiões próximas ao contorno descreveram bem seus poços, ou seja, com uma maior quantidade de dados, acredita-se que o modelo se adequa melhor, uma vez que haverá melhor representação do contorno.

O fato dos valores finais se manterem constantes a partir de certo número de pontos confirma a relação tratada por Kansa (1990), em que é possível trabalhar com a função de aproximação multiquádrica utilizando uma quantidade reduzida de pontos.

A aplicação de métodos numéricos livres de malhas é relativamente recente, quando comparados às metodologias mais conhecidas e tradicionais, como MEF e MDF, mas os resultados mostram que existe uma possibilidade para buscar valores para o parâmetro 'c' e de aplicá-lo para simulação de fluxo subterrâneo, por ter apresentado eficientes resultados.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, M.; WENDLAND, E. C. Método de elementos analíticos: Uma alternativa para a modelagem de escoamento subterrâneo. *Águas Subterrâneas*. São Paulo, v. 27, n. 1, p. 110-124, 2013.

BAXTER, B. J. C. The interpolation theory of radial basis functions. Cambridge, Reino Unido. 142 p. Tese de Doutorado. Trinity College, Cambridge University, 1992.

BERTOLO, R.; HIRATA, R.; CONICELLI, B.; SIMONATO, M.; PINHATTI, A.; FERNANDES, A. Água subterrânea para abastecimento público na região metropolitana de São Paulo: é possível utilizá-la em larga escala? *Revista DAE*. São Paulo, v. 63, n. 199, p. 6-17, 2015.

COGERH – Companhia de Gestão dos Recursos Hídricos. Boletim de monitoramento dos poços com *datalogger* no Cariri – CE (Ano 2013). Ceará: 2014.

CPRM – Serviço Geológico do Brasil. Programa de recenseamento de fontes de abastecimento por água subterrânea no estado do Ceará - Diagnóstico do município de Juazeiro do Norte. Fortaleza: 1998.

DE PAULA, R. S.; VELÁSQUEZ, L. N. M. Modelagem numérica de fluxo de um aquífero cárstico-fissural. *Águas Subterrâneas*. São Paulo, v. 27, n. 2, p. 66-78, 2013.

FASSHAUER, G. E. Newton iteration with multiquadrics for the solution of nonlinear PDEs. *Computers and Mathematics with Applications*. v. 43, n. (3/5), p. 423 – 438, 2002.

FERNANDO, A. M.; HU, F. Q. DGM-FD: A finite difference scheme based on the discontinuous Galerkin method applied to wave propagation.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa teve o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Os autores também agradecem à colaboração e o apoio da Universidade Federal do Ceará, por meio do Laboratório de Hidráulica Computacional, durante o desenvolvimento dessa pesquisa.

Journal of Computational Physics. v. 230, p. 4871 – 4898, 2011.

FERREIRA, A. J. M.; ROQUE, C. M. C.; JORGE, R. M. N. A meshless approach for the analysis of orthotropic shells using a higher-order theory and an optimization technique. In: FERREIRA, A. J. M.; KANSA, E. J.; FASSHAUER, G. E.; LEITÃO, V. M. A. *Progress on Meshless Methods*. Barcelona: Springer, 2009.

FRANKE, C; SCHABACK, R. Solving partial differential equations collocation using radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*. v. 93, p. 73 – 82, jul. 1998.

FRANKE, R. Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Mathematics of Computation*. v. 38, n. 157, p. 181 – 200, jan. 1982.

HARDY, R. L. The Application of multiquadric equations and point mass anomaly models to crustal movement studies. NOAA Technical Report NOS 76 NGS 11. U.S. Department of Commerce - National Oceanic and Atmospheric Administration, 1978.

HARDY, R. L. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988. *Computers Math. Applic.* Vol. 19, n. 8/9, p. 163 – 208, 1990.

KANSA, E. J. Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I: Surface approximations and partial derivative estimates. *Computers Math. Applic.* v. 19 (8/9), p. 127 – 145 1990a.

KANSA, E. J. Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to compu-

- tational fluid-dynamics - II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers Math. Applic.* Vol. 19, n. 8/9, p. 147 – 161, 1990b.
- LIU, G. R; LIU, M. B. Smoothed particle hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003.
- MENESCAL, G. C. Modelagem numérico-analítica da contaminação de aquíferos utilizando o método de colocação RBF livre de malha. Fortaleza, Ceará, Brasil. 128 p. Tese (Doutoramento em Engenharia Civil, concentração Recursos Hídricos). Universidade Federal do Ceará, 2008.
- MIDDLETON, J; JONES, M. L; WILSON, A. N. Three-dimensional analysis of orthodontic tooth movement. *Journal of Biomedical Engineering.* vol. 12, p. 319 – 327, jul. 1990.
- RODRIGUES, J. D; ROQUE, C. M. C; FERREIRA, A. J. M. Analysis of isotropic and laminated plates by an affine space decomposition for asymmetryc radial basis funtions collocation. *Revista Engineering Analysis with Boundary Elements.* v. 36, p. 709 – 715, jan, 2012.
- SILVA, L. R. D.; LUCENA, L. R. F.; VIEIRA, M. M.; NASCIMENTO, A. F. Estimativa de parâmetros hidráulicos do aquífero Barreiras-RN a partir de análise computacional de imagens de lâminas delgadas. *Águas Subterrâneas.* São Paulo, v. 28, n. 2, p. 14-27, 2014.
- SOUZA, C. D.; CASTRO, M. A. H. Simulação do fluxo hídrico subterrâneo por estimativa de parâmetros usando cargas hidráulicas observadas: caso do Cariri cearense, Brasil. *Revista Recursos Hídricos.* Lisboa, v. 34, n. 1, p. 43-61, 2013.
- SUCH, M; JIMENEZ-OCTAVIO, J. R; CARNICERO, A; SANCHEZ-REBOLLO, C. Simulación de cargas móviles sobre estructuras mediante un mallado móvil de elementos finitos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería.* v. 31, n. 04, p. 212 – 217, dez, 2015.
- VERÍSSIMO, L. S. A importância das águas subterrâneas para o desenvolvimento socioeconômico do eixo CRAJUBAR, Cariri Ocidental – Estado do Ceará. Fortaleza, Ceará, Brasil. 160 p. Dissertação (Mestrado em Geologia, concentração Hidrogeologia). Universidade Federal do Ceará, 1999.
- VERÍSSIMO, L. S.; AGUIAR, R. B. Comportamento das bacias sedimentares da região semiárida do nordeste brasileiro - Hidrogeologia da porção oriental da Bacia Sedimentar do Araripe. Meta A: Diagnóstico do Estado da Arte. Rede Cooperativa de Pesquisa: FINEP – CPRM – UFC, 2005.
- WENDLAND, E.; SIMONATO, M. D.; LAPICCIRELLA, E. S.; HIRATA, R. Modelo numérico de escoamento subterrâneo na região de São José do Rio Preto – SP. *Águas Subterrâneas.* São Paulo, v. 27, n. 1, p. 92-109, 2013.