

PROPAGAÇÃO DE VAZÕES SUPERFICIAIS E SUBTERRÂNEAS  
EM UM TRECHO DE RIO

N.Luna Caicedo\* e L.Finger Roman\*\*

\* Instituto de Pesquisas Hidráulicas da UFRGS,  
Caixa Postal 530, 90.001. Porto Alegre, RS.

\*\* Civil Engineering Department, University of Sheffield  
S10 2HQ Sheffield, England.

RESUMO

Um modelo matemático é usado para simular a propagação de vazões superficiais e subterrâneas em um trecho do rio São Francisco (MG). As vazões superficiais são simuladas através do modelo de Muskingum, enquanto que as subterrâneas através da equação linearizada de Boussinesq. O acoplamento é feito através de funções núcleo (Green's functions). Os parâmetros de Muskingum são calibrados utilizando o método dos momentos, e os parâmetros hidrogeológicos mediante um processo de tentativa e erro.

INTRODUÇÃO

Os estudos hidrológicos de propagação de ondas de cheia tradicionalmente consideram o rio como um sistema impermeável. Isto deve-se principalmente à predominância do deflúvio superficial sobre o subterrâneo e à falta de harmonia entre os dois sistemas. Entretanto, na época de estiagem, a contribuição subterrânea é muito importante, não somente no processo de formação da vazão dos rios, como também no estudo de propagação de vazões e previsão hidrológica. Assim, objetiva-se neste trabalho usar um modelo que simule a propagação de um hidrograma em um sistema no qual o rio e o aquífero estão hidráulicamente conectados, isto é, propagar as descargas em um trecho de rio considerando a influência da contribuição subterrânea.

METODOLOGIA

O modelo de Muskingum (McCarthy, 1938) para propagação de descargas em um trecho de rio relaciona o armazenamento de água no trecho com as descargas de montante e jusante, segundo a expressão:

$$S = K [wI + (1-w)O] \quad (1)$$

onde S é o armazenamento no trecho, I e O são as descargas de montante e jusante, K e w são parâmetros. Juntamente com a equação de armazenamento, também é considerada a equação da continuidade:

$$dS/dt = I - O + Q \quad (2)$$

a qual relaciona a taxa de variação do armazenamento em um período de tempo, com as descargas de entrada e saída, incluindo a contribuição do fluxo subterrâneo Q ao longo do trecho (Morel-Seytoux, 1975). A geometria do trecho pode ser simplificada de maneira a permitir o cálculo do armazenamento em função da área da seção longitudinal A (comprimento vezes largura) e da altura média da água y no trecho:

$$S = A y \quad (3)$$

As equações (1) e (2) podem ser agrupadas em uma só, eliminando a variável O comum entre elas,

obtendo-se assim uma equação diferencial ordinária em S:

$$(1-w)dS/dt + S/K = I + (1-w)Q \quad (4)$$

note-se que no lado direito da equação (4) estão agrupados os termos que produzem excitação no sistema. Uma maneira de resolver esta equação consiste em excitar o sistema com um salto unitário, nele incluídas as descargas de montante I e a subterrânea Q. A resposta a este tipo de excitação é o núcleo salto unitário de armazenamento  $K_s(t)$ :

$$K_s(t) = K \{ 1 - \exp[-t/(1-w)K] \} \quad (5)$$

A derivada do núcleo salto unitário de armazenamento é, por definição, o núcleo impulso unitário de armazenamento  $ks(t)$ :

$$ks(t) = 1/(1-w) \exp[-t/(1-w)K] \quad (6)$$

A equação (3) permite isolar o valor da altura da água em função do armazenamento e da área longitudinal. Segue-se que o núcleo impulso unitário da altura da água,  $ky(t)$ , é igual ao núcleo salto unitário de armazenamento dividido pela área longitudinal do trecho:

$$ky(t) = ks(t)/A \quad (7)$$

A teoria linear dos sistemas (Dooge, 1973) permite encontrar o valor da altura da água para qualquer tipo de excitação através da integral de convolução:

$$y(t) = \int_0^t ky(t-\tau) [I(\tau) + (1-w)Q(\tau)] d\tau \quad (8)$$

A altura da água pode também ser considerada uma variável discreta, neste caso, a integral transforma-se em um somatório e o núcleo impulso unitário em um núcleo discreto:

$$y(n) = \sum_{u=1}^n \delta y(n-u+1) [I(u) + (1-w)Q(u)] \quad (9)$$

onde o núcleo discreto da altura da água  $\delta y(n)$  é calculado pela seguinte expressão:

$$\delta y(n) = K/A \{ \exp[1/(1-w)K] - 1 \} \exp[-n/(1-w)K] \quad (10)$$

cujos valores são calculados, ao final de cada intervalo de tempo de duração unitária.

A equação (9) não resolve satisfatoriamente o problema proposto. Acontece que, a descarga subterrânea é função da altura da água, mais precisamente da diferença de nível entre a linha da água no rio e no aquífero regional, podendo a água escoar em direção ao aquífero e vice-versa. Há necessidade, portanto, de estabelecer uma relação entre a descarga subterrânea e a altura da água.

Seja um trecho de rio completamente penetrante e hidráulicamente conectado com um aquífero semi-infinito, com parâmetros hidrogeológicos homogêneos (transmissividade T e porosidade efetiva  $\phi$ ), regido pela equação linearizada de Boussinesq (Moench, 1971):

$$\phi \partial r / \partial t - \alpha \partial^2 r / \partial x^2 = 0 \quad (11)$$

onde r é o rebaixamento (diferença de nível entre um datum superior e a linha da água no aquífero), e  $\alpha = T/\phi$  é a difusividade hidráulica do aquífero. Da mesma maneira como foi resolvida a equação (4), a equação (11) também pode ser resolvida em termos de excitações especiais. No tempo zero o nível de água no rio cai, instantaneamente, numa altura igual a uma unidade, permanecendo nessa posição indefinidamente. A resposta a essa excitação especial (salto unitário) é por definição o núcleo salto unitário.

$$Kr(x,t) = \text{erfc} (x/2\sqrt{\alpha t}) \quad (12)$$

onde  $Kr(x,t)$  é o núcleo salto unitário de rebaixamento no aquífero (função da distância x ao rio e do tempo t), devido a um salto unitário de rebaixamento no rio,  $\text{erfc}(u)$  é a função erro complementar do argumento u. Depois de ter conseguido esta resposta especial, o rebaixamento no aquífero a qualquer distância e em qualquer tempo, devido a qualquer tipo de variação de nível do rio, pode ser expressa pela integral de convolução:

$$r(x,t) = \int_0^t \text{erfc} [x/2\sqrt{\alpha(t-\tau)}] \partial h/\partial \tau d\tau \quad (13)$$

onde  $h$  é o rebaixamento do nível do rio e  $\tau$  a variável de integração. Uma vez obtido o rebaixamento no aquífero, a descarga subterrânea  $Q$  pode ser simplesmente calculada, utilizando a equação de Darcy na interface entre o rio e o aquífero:

$$Q = -2LT \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (14)$$

onde  $L$  é o comprimento do rio e  $2$  refere-se aos dois lados do rio. Uma situação interessante ocorre ao tomar a derivada da equação (12). Neste caso, a descarga subterrânea é a resposta a um salto unitário de rebaixamento no rio, isto é, o núcleo salto unitário de descarga subterrânea.

$$Kq(t) = 2LT / \sqrt{\pi \alpha t} \quad (15)$$

A resposta a qualquer tipo de excitação pode ser encontrada pela aplicação da integral de convolução:

$$Q(t) = 2LT / \sqrt{\pi \alpha} \int_0^t \left( \frac{\partial h}{\partial \tau} \right) / \sqrt{t-\tau} \, d\tau \quad (16)$$

A solução analítica da equação (16) não apresenta interesse prático algum pois, dependendo da função empregada para representar  $h$ , poderia resultar numa integral sem solução. Mais interessante é a solução discreta, mesmo porque em um determinado intervalo de tempo, a variação do nível de água em uma seção transversal de um rio pode ser considerada linear, com valores conhecidos no início e no fim do intervalo. Neste caso, a descarga subterrânea pode ser calculada pelo seguinte somatório:

$$Q(n) = \sum_{u=1}^n [h(u) - h(u-1)] \delta q(n-u+1) \quad (17)$$

onde o núcleo discreto de descarga subterrânea é dado pela seguinte expressão:

$$\delta q(u) = 4LT / \sqrt{\pi \alpha} [ \sqrt{u} - \sqrt{u-1} ] \quad (18)$$

Voltando as equações (9) e (10), a linha da água em uma seção transversal pode ser calculada desde que sejam conhecidas as descargas de montante e as descargas subterrâneas. Ora, as descargas subterrâneas não podem ser controladas e dependem da altura da água no rio. Por outro lado, as equações (17) e (18) mostram que é possível calcular a descarga subterrânea desde que seja conhecida a variação do nível da água no trecho. Portanto, estamos diante de um processo no qual é necessário avaliar várias equações da seguinte maneira:

1. Estimar os parâmetros de Muskingum pelo método dos momentos (Morel-Seytoux, 1979), ou por qualquer outro método de estimação.
2. Fixar um valor de transmissividade, bem como arbitrar um valor de porosidade e fetiva inicial.
3. Usar as equações (17) e (18) para gerar as descargas subterrâneas.
4. Usar as equações (9) e (10) para gerar as alturas da água.
5. Comparar os valores calculados e observados das alturas da água através de uma função objetivo (coeficiente de determinação).
6. Repetir os passos de 2 a 5, alterando o valor da porosidade efetiva ou da transmissividade, até que o valor da função objetivo seja aceitável, ou parar o processo se não houver alteração entre dois valores consecutivos.

#### APLICAÇÃO

O modelo foi aplicado em um trecho do rio São Francisco (MG) entre São Ramão e Manga no período de 01 a 26 de Março de 1959. O trecho tem 240 km de comprimento e largura média de 445m. Em Barra do Escuro foi adicionada a contribuição do rio Urucui no hidrograma de montante. O método dos momentos (Morel-Seytoux, 1979) foi utilizado para estimar os parâmetros de Muskingum, com valores de  $K=3$  dias e  $w=0.2$ , o valor da função objetivo foi de 0.835.

Para o cálculo dos parâmetros hidrogeológicos, fixou-se inicialmente o valor da transmissividade de em  $1000 \text{ m}^2/\text{dia}$ , variando o valor da porosidade efetiva obteve-se um valor de  $\phi = 0.01$ ; este valor otimizou a função objetivo (figura 1). A seguir, mantendo fixo o valor da porosidade efetiva ótimo e variando o valor da transmissividade, obteve-se o valor de  $T=1150 \text{ m}^2/\text{dia}$ , esse valor também otimizou a função objetivo (figura 2). A cada par de valores de transmissividade e porosidade efetiva associou-se um coeficiente de determinação, que fez o papel de função objetivo. O valor do coeficiente de determinação para esses valores foi de 0.955.

#### CONCLUSÕES

Comparando os dois métodos de propagação de vazões (figura 3), verifica-se vantagens do método que considera o fluxo subterrâneo sobre o tradicional. A primeira diz respeito ao melhor ajuste obtido principalmente no pico do hidrograma, consequência de uma melhor distribuição adicional de volumes ao longo do trecho, intervalo após intervalo. A segunda, diz respeito a um melhor entendimento do processo de propagação. Ao invés de tentar ajustar um modelo com parâmetros irrealistas, parece-nos mais adequado o entendimento físico do processo.

Embora os valores da função objetivo não sejam tão discordantes, a figura 3 mostra uma sensível diferença entre o hidrograma calculado pelo método tradicional e o calculado pelo método aqui apresentado. A maior fonte de erro encontra-se na recessão do hidrograma, onde a contribuição subterrânea é mais importante.

O método aqui apresentado, pode ser usado como componente físico de um modelo mais amplo de gerenciamento de sistemas nos quais o rio e o aquífero encontram-se hidráulicamente conectados. Após encontrar os valores dos parâmetros de Muskingum e os parâmetros hidrogeológicos, calcula-se e guarda-se os valores dos núcleos discretos (equações 10 e 18) em um arquivo eletrônico de dados. Como as descargas de montante e jusante podem ser controladas pelo homem (em cursos de água de zonas áridas), uma outra estratégia pode ser simplesmente simulada usando os mesmos valores dos núcleos discretos previamente guardados. Isto trará, como consequência, uma economia de tempo de computador.

#### AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por ter patrocinado esta investigação através de bolsas de auxílio à pesquisa e de estudos, respectivamente.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dooge, J.C.I. (1973). Linear theory of hydrologic systems, USDA, Tech. Bull. 1468, 327 pp.
- McCarthy, G.T. (1938). The unit hydrograph and flood routing, presented at conference of North Atlantic Division, U.S. Corps of Engineers, June.
- Morel-Seytoux, H.J. (1975). A combined model of water table and river stage evolution. Water Resources Research, Vol.11, No.6, pp.968-972.
- Morel-Seytoux, H.J. (1979). Engineering hydrology. Ensemble of class notes. HYDROWAR report. Colorado State University. Fort Collins, Co. 446pp.
- Moench, A.F. (1971). Ground-water fluctuations in response to arbitrary pumpage. Ground Water Journal, 9(2), pp.4-8.

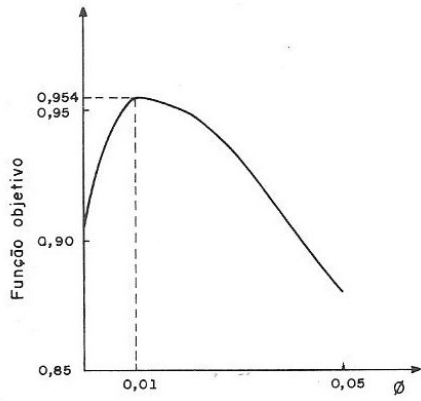


Figura 1 — Variação da porosidade efetiva

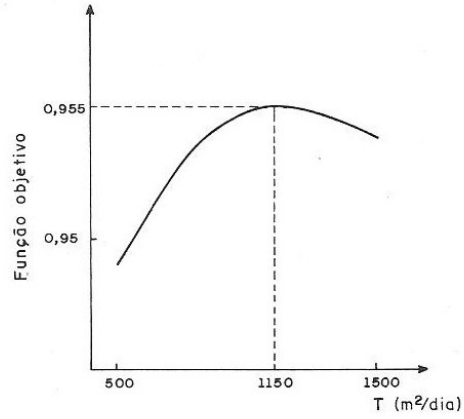


Figura 2 — Variação da transmissividade

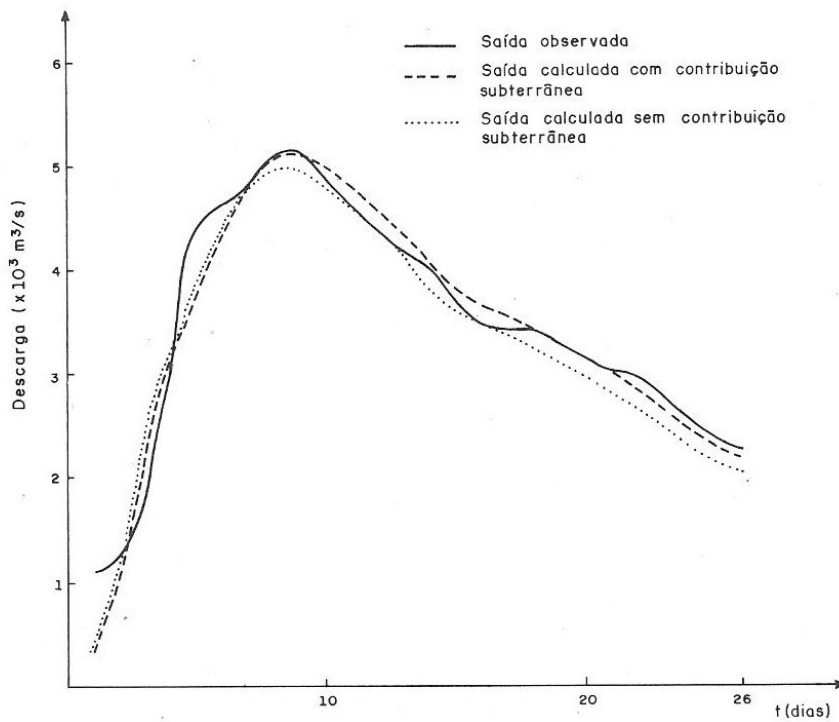


Figura 3 — Hidrogramas observado e calculado no Rio São Francisco