

TRAÇADO DE REDE DE FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA UTILIZANDO O PROGRAMA GFLOW1 E O SOFTWARE MAPLE 6.0

*Carisia Carvalho Gomes*¹
*Marco Aurélio Holanda de Castro*²

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a apresentação dos traçados da rede de fluxo da água subterrânea em um aquífero confinado onde existem dois poços de bombeamento próximos um do outro. O primeiro traçado, bidimensional, é feito com a aplicação do programa GFLOW1 (Haitjema, 1995) que utiliza o Método de Elementos Analíticos para a solução do problema, ou seja, o cálculo do potencial de carga e da função de linha de fluxo necessários para o traçado, considerando a superposição de dois elementos analíticos que são os dois poços existentes. O segundo traçado, dos mesmos poços, é feito através da aplicação do software MAPLE 6.0, uma ferramenta matemática computacional que também plota as funções analíticas dos potenciais de carga e de linha de fluxo, diretamente e também em duas dimensões.

INTRODUÇÃO

Os problemas de fluxo de água subterrânea podem ser resolvidos de diversas maneiras, entre elas através de métodos numéricos como o de diferenças finitas e de elementos finitos. O Método de Elementos Analíticos, utilizado no programa GFLOW1, surge como uma alternativa para a resolução destes problemas com a vantagem de ser um método conceitualmente muito simples o qual não necessita da discretização do domínio visto que este é baseado no princípio da superposição de funções analíticas que é feita através da adição de todas as influências dos elementos analíticos individuais, representados pelas funções, que correspondem aos componentes (características) do aquífero. No caso em estudo, a influência dos dois poços, dois elementos analíticos, no traçado da rede de fluxo no aquífero. O presente trabalho apresenta inicialmente a fundamentação teórica para obtenção das equações do potencial de carga e da função de linha de fluxo necessários para o traçado da rede de fluxo utilizando o GFLOW1 e em seguida a aplicação do software Maple 6.0 com o objetivo de mostrar a mesma rede de fluxo sendo que desta vez em três dimensões.

1) Universidade Federal do Ceará; Depto. de Engenharia Hidráulica e Ambiental; Campus do Pici, Bloco 713, 1º andar; 60451-970; cx. postal 6018 - ag.Pici; Fortaleza; CE; Brasil; (85) 288-9776; (85)288-9627; carisia@ufc.br.

2) Universidade Federal do Ceará; Depto. de Engenharia Hidráulica e Ambiental; Campus do Pici, Bloco 713, 1º andar; 60451-970; cx. postal 6018 - ag.Pici; Fortaleza; CE; Brasil; (85) 288-9770; (85)288-9627; marco@ufc.br

FLUXO POTENCIAL BIDIMENSIONAL

A teoria potencial aplicada ao fluxo de Dupuit-Forchheimer tanto para aquífero confinado como para não confinado pode ser resumida da seguinte forma. O fluxo total, integrado em toda espessura do aquífero, é descrito pelo vetor de vazão, Q_i , definido por (Haitjema, 1995):

$$\begin{aligned} Q_x &= Hq_x & Q_y &= Hq_y & \phi &\geq H \\ Q_x &= \Phi q_x & Q_y &= \Phi q_y & \phi &\leq H \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\phi \geq H$ indica condições de fluxo confinado e $\phi \leq H$ de fluxo não confinado, sendo ϕ a carga hidráulica, H a espessura do aquífero e q_i é a velocidade ou vazão específica. A equação de continuidade do fluxo em termos de Q_i é:

$$\partial_i Q_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

Ou seja, o divergente do vetor de vazão é zero. O vetor de vazão Q_i é também definido como o gradiente negativo do escalar do potencial de carga, Φ :

$$Q_i = -\partial_i \Phi \quad (3)$$

O potencial de carga é definido diferentemente para o fluxo confinado e não confinado:

$$\begin{aligned} \Phi &= kH\phi - \frac{1}{2}kH^2 & \phi &\geq H \\ \Phi &= \frac{1}{2}k\phi^2 & \phi &\leq H \end{aligned} \quad (4)$$

A carga hidráulica é obtida a partir do potencial de carga:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\Phi + \frac{1}{2}kH^2}{kH} & \phi &\geq \frac{1}{2}kH^2 \\ \phi &= \sqrt{\frac{2\Phi}{k}} & \phi &\leq \frac{1}{2}kH^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Combinando-se a equação (3) com a equação (2) temos a equação diferencial de Laplace:

$$\partial_{ii} \Phi = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

LINHAS EQUIPOTENCIAIS E LINHAS DE FLUXO

Segundo Haitjema, 1995, a função potencial de carga $\Phi(x, y)$ pode ser vista como uma superfície em três dimensões com os níveis da superfície em x e y igual a $\Phi(x, y)$. Podemos desenhar contornos desta superfície para valores iguais de Φ , da mesma maneira como desenhamos mapas topográficos para indicar os níveis do terreno (curvas de nível). Cada contorno é um lugar com pontos de mesmo valor para o potencial de carga: uma equipotencial.

O fluxo de água subterrânea ocorre perpendicular ou normal a estas equipotenciais, conforme Figura 1.

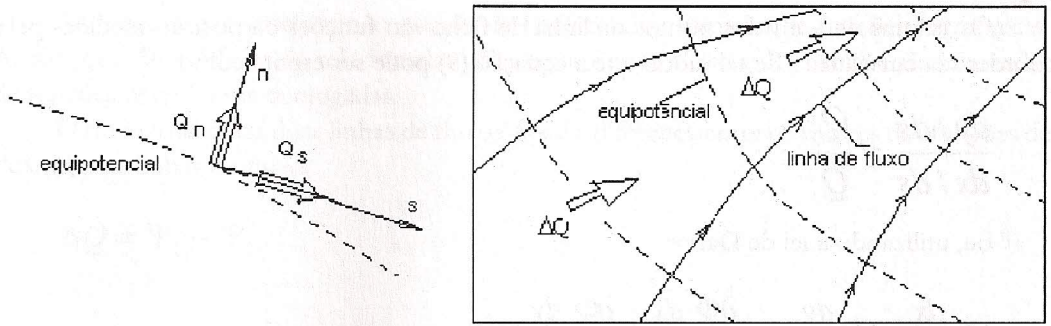


Figura 1. Linhas de fluxo e equipotenciais

Os componentes do vetor de vazão são, Q_s tangencial a linha equipotencial e Q_n normal a equipotencial com relação ao sistema de coordenada (s, n) . As componentes do vetor de vazão são, de acordo com a Lei de Darcy:

$$Q_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad \text{e} \quad Q_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{7}$$

A derivada do potencial na direção s , ao longo de uma equipotencial é zero:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \tag{8}$$

Com isso, Q_s desaparece e assim fica apenas a componente do fluxo no ponto, Q_n que é normal à equipotencial. Em condições de fluxo permanente, as trajetórias das partículas da água são chamadas de linhas de fluxo. A quantidade total de água $\Delta Q [L^3/T]$ entre duas linhas de fluxo (Figura 1) não muda a não ser que as linhas estejam divergindo (a taxa de vazão diminui) ou convergindo (a taxa de vazão aumenta).

A FUNÇÃO DE LINHA DE FLUXO

Para problemas de fluxo de água subterrânea governado pela equação de Laplace existe uma função escalar $\Psi(x, y)$, que é constante ao longo da linha de fluxo. A função de linha de fluxo pode ser contornada da mesma forma como a função do potencial de carga, originando as linhas de fluxo. Para demonstrar a existência de Ψ , temos que o vetor Q_i , na Figura 2, é tangencial à linha de fluxo, de maneira que (Haitjema,1995):

$$\text{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{Q_y}{Q_x} \tag{9}$$

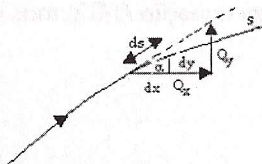


Figura 2. Vetor de vazão tangencial à linha de fluxo

Os valores de x e y dos pontos na linha de fluxo são funções da posição medidas pela coordenada curvilínea s de tal modo que a equação (9) pode ser escrita como:

$$\frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{Q_y}{Q_x} \quad (10)$$

ou, utilizando a lei de Darcy:

$$Q_y \frac{dx}{ds} - Q_x \frac{dy}{ds} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (11)$$

A função da linha de fluxo, Ψ , é definida como sendo constante ao longo da linha:

$$\frac{d\Psi}{ds} = 0 \quad (12)$$

Escrevendo-se a derivada total da equação (12) em termos de derivada parcial temos:

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (13)$$

A comparação entre as equações (11) e (13) resulta na seguinte relação fundamental:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = +\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (14)$$

Que são conhecidas como equações de Cauchy-Riemann. A função, Ψ , que satisfaz o critério de analiticidade acima para uma função específica de Φ , é a função de linha de fluxo que pertence a esta função de potencial de carga.

Para provar que Ψ também satisfaz a equação de Laplace, segue-se de (14) e da Lei de Darcy que:

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = +\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (15)$$

Aplicando-se a continuidade do fluxo, $\partial_i Q_i = 0$, temos que:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \quad (16)$$

Aplicando-se a equação (16) na equação (14) temos que:

$$\partial_{ii} \Psi = 0 \quad (17)$$

As funções que satisfazem a equação de Laplace são chamadas de funções harmônicas. As funções Φ_1 e Ψ estão relacionadas pelas equações de Cauchy-Riemann e são chamadas de funções harmônicas conjugadas.

O fluxo total entre duas linhas de fluxo é igual à diferença entre os valores das funções de fluxo destas linhas de fluxo.

$$\Delta Q = \Psi_1 - \Psi_2 \quad (18)$$

FLUXO RADIAL EM DIREÇÃO A UM POÇO

O fluxo de um único poço em um aquífero é simetricamente radial e a origem do sistema de coordenadas (r, θ) , é o centro do poço. Aplicando-se a continuidade do fluxo através de um círculo de raio r temos que:

$$Q = 2\pi r(-Q_r) \quad (19)$$

onde $(-Q_r)$ é a componente do vetor de vazão através do círculo por unidade de comprimento do círculo. O sinal negativo indica que o fluxo ocorre na direção negativa de r . A componente do vetor de vazão satisfaz a lei de Darcy:

$$Q_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (20)$$

Combinando-se as equações (19) e (20) temos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r} \quad (21)$$

O potencial de carga é obtido pela integração de (21) com relação a r :

$$\Phi = \int \frac{d\Phi}{dr} dr = \int \frac{Q}{2\pi r} \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C_w \quad (22)$$

Onde C_w é a constante de integração que é escolhida para atender alguma condição de contorno.

Se $r = R$ então $\Phi = \Phi_0$; substituindo-se em (22) tem-se o valor de C_w

$$C_w = \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi} \ln R \quad (23)$$

Combinando-se as equações (23) e (22) temos o potencial de carga:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{R} + \Phi_0 \quad (24)$$

FUNÇÃO DE LINHA DE FLUXO PARA UM POÇO

As linhas de fluxo para um poço são as linhas radiais que emanam do centro do poço. A função de fluxo é dada por:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (25)$$

O ângulo θ pode ser expresso em termos de coordenadas (x, y) e:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (26)$$

PRINCIPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Considerando-se o potencial $\Phi_1(x, y)$ devido a um poço # 1 e o potencial $\Phi_2(x, y)$ devido a outro poço # 2. As distâncias do poço # 1 e do poço # 2 ao ponto P no domínio do fluxo são r_1 e r_2 , respectivamente, ver Figura 3.

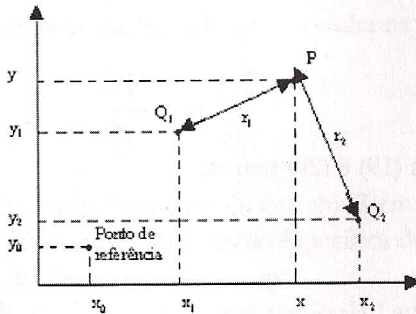


Figura 3. Localização de dois poços próximos em um aquífero

O potencial de carga em P devido ao poço # 1 com vazão Q_1 é:

$$\Phi_1 = \frac{Q_1}{2\pi} \ln r_1 + C_1 \quad (27)$$

e devido ao poço # 2 é:

$$\Phi_2 = \frac{Q_2}{2\pi} \ln r_2 + C_2 \quad (28)$$

A soma dos potenciais é $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Se Φ_1 e Φ_2 satisfazem a equação de Laplace então a soma deles também irá satisfazer. Em outras palavras, a soma de várias soluções de fluxo de água subterrânea é também uma solução para o fluxo de água subterrânea, que é a aplicação do princípio de superposição de soluções.

A solução para o problema de fluxo da Figura 3, fluxo em torno de dois poços é obtida pela adição de (27) e (28) :

$$\Phi = \frac{Q_1}{2\pi} \ln r_1 + \frac{Q_2}{2\pi} \ln r_2 + C \quad (29)$$

Onde C é a soma de C_1 e C_2 que podem ser escolhidas para satisfazer alguma condição de contorno, por exemplo, a que o potencial é igual a Φ_0 , o ponto de referência: $x = x_0$, $y = y_0$ e $\Phi = \Phi_0$

As distâncias r_1 e r_2 podem ser escritas em termos de coordenadas cartesianas dos poços e do ponto P, ver Figura 3:

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \quad (30)$$

A solução completa que satisfaz a condição de contorno é:

$$\Phi = \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} + \frac{Q_2}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}} + \Phi_0 \quad (31)$$

O princípio da superposição é também aplicado a função de linha de fluxo, desde que Laplace em termos de Ψ seja também linear. A função de linha de fluxo para os dois poços é:

$$\Psi = \frac{Q_1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) + \frac{Q_2}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_2}{x - x_2} \right) \quad (32)$$

A rede de fluxo para os dois poços está plotada na Figura 4.

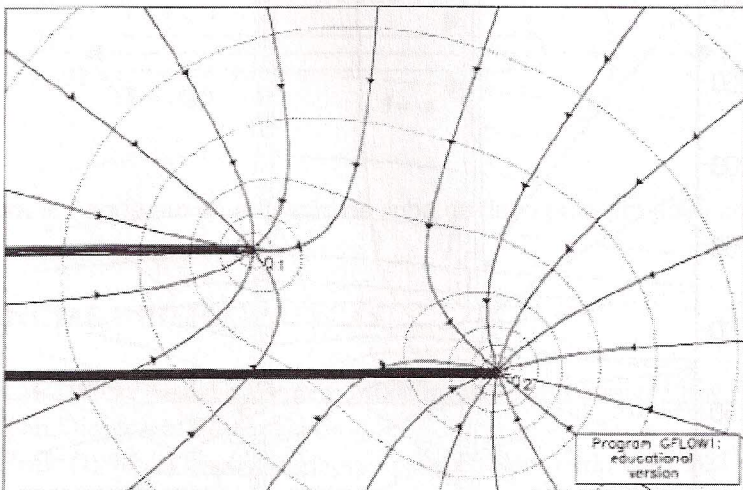


Figura 4. Rede de Fluxo de dois poços utilizando o Método de Elementos Analíticos - programa GFLOW1 (Fonte: Haitjema, 1995)

Onde as linhas pontilhadas são as equipotenciais e as linhas sólidas são as linhas de fluxo. Os cálculos necessários para produzir estas linhas foram realizados pelo GFLOW1. O programa calcula Φ e Ψ em uma malha de pontos distribuídos no domínio da Figura 4, depois que cada rotina gera as equipotenciais e as linhas de fluxo para valores específicos de Φ e Ψ , respectivamente. Os dados de entrada para a Figura 4 estão armazenados no arquivo: *problem1.dat* do programa GFLOW1 que é o seguinte:

```

problem1 / GFLOW1
aquifer (aqüífero)
perm 50 [L/T] (permeabilidade)
thick 50 [L] (espessura)
por 0.2 (porosidade)
reference 0 0 60 (ponto de referência (0,0) com carga 60 [L])
100 100 20000 0.5 *well # 1 (coordenadas [x,y] do poço, vazão, raio do poço,
número do poço)
200 50 30000 0.5 *well # 2
wind 0 0 300 200 (0,0 – coordenadas [x,y] do canto esquerdo inferior;300,200 - coorde
nadas do canto direito superior do domínio)
horizontalpoints 80 ( malha com 80 pontos na direção horizontal, são utilizados na
direção vertical mais ou menos o mesmo número de pontos)

```

RESULTADOS

A Figura 4 apresenta como o traçado da rede de fluxo é obtido quando o programa GFLOW1 é utilizado. O traçado da rede de fluxo utilizando o Maple 6.0 para o aquífero que possui dois poços foi elaborado com os mesmos dados de entrada do arquivo *problem1* do programa GFLOW1 (Haitjema,1995). A Figura 5 mostra o traçado da rede de fluxo com a utilização do Maple 6.0 (Kamerich, 1998) e (Klimek & Klimek, 1997).

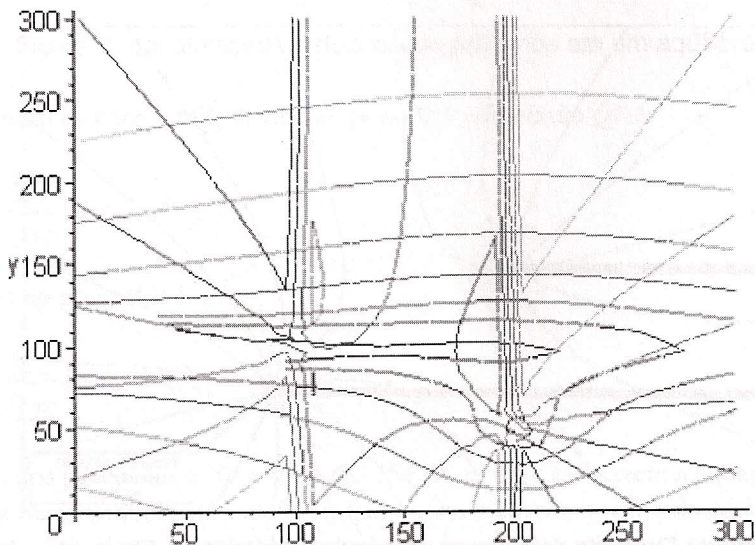


Figura 5. Rede de fluxo com a utilização do Maple 6.0

CONCLUSÃO

Fazendo-se uma análise comparativa dos resultados obtidos nos gráficos dos traçados da rede de fluxo no aquífero que possui dois poços, Figuras 4 e 5, pode ser observado que a fenda na Figura 4 ocorreu na direção horizontal enquanto que na Figura 5 ele ocorreu na direção vertical. Os dois resultados são perfeitamente aceitos, visto que, a função de linha de fluxo na equação (25) exibe um salto quando o valor principal do ângulo θ salta de $+\pi$ para $-\pi$ através de sua fenda. A fenda do ângulo θ pode ser escolhida em direções diferentes, como no caso das Figuras 4 e 5, o importante é que ela sempre deverá apresentar um salto de 2π . Se colocarmos o sistema de coordenadas no centro do poço, no caso da fenda horizontal, a função de linha de fluxo terá o valor de $+Q/2$ logo acima do eixo negativo de x e $-Q/2$ logo abaixo do eixo negativo de x , como pode ser visto na Figura 6. A razão para o salto na Figura 6 é porque, no próprio poço, a divergência da vazão não é zero mas é igual a vazão no poço. Conseqüentemente a equação de Laplace não pode ser aplicada, pontualmente, no poço. O poço não deve ser considerado como parte do domínio do fluxo, o que não se constitui um problema, visto que, não é de costume avaliarmos cargas e fluxo dentro do raio do poço. Como uma interpretação física para isto, podemos imaginar o domínio do fluxo (no plano bidimensional) sendo cortado e aberto ao longo do eixo x e em volta do poço, eliminando-se o poço do domínio do fluxo. A água que flui em direção ao poço, dentro do domínio do fluxo, é removida através de uma fenda ao longo do eixo negativo de x . Portanto existe um fluxo (fictício) Q a partir do poço, através da fenda e em direção ao infinito. De fato, este fluxo é consistente com o comportamento da função de linha de fluxo através da fenda, cujo salto Q sugere um fluxo na fenda igual a Q . A direção do fluxo na fenda é a partir do poço para o infinito.

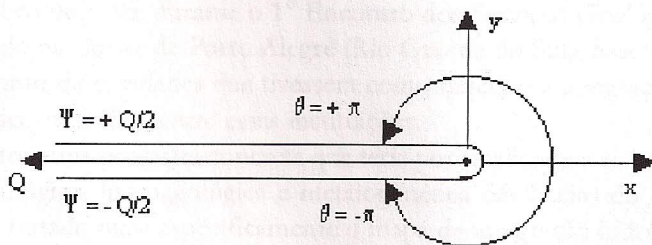


Figura 6. Fenda em uma função de linha de fluxo para um poço com vazão

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Haitjema, H.M. (1995). *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow*. Academic Press, Inc., San Diego, USA, 400 páginas
- Kamerich, Ernic (1998). *A Guide to Maple*. Springer. New York, USA. 321 páginas.
- Klimek, Grazyna & Klimek, Maciej (1997). *Discovering curves and surfaces with Maple*. Springer. New York, USA. 217 páginas.
- Monagan, M.B. et al (1998). *Maple V Programming Guide*. Spinger. Waterloo Maple Inc. NY. USA