Modelação do Manancial Subterrâneo de Ribeirão Preto
2 . Modelação Matemática

Abelardo Antônio de Assunção Montenegro (a)

Antônio Marozzi Righetto (a)

Resumo

O presente artigo desenvolve o equacionamento básico para modelação de aquíferos abertos superpostos, levando-se em consideração a permeabilidade e armazenabilidade do estrato intermediário O escoamento subterrâneo é simulado com o auxílio do método dos Elementos Finitos. O objetivo é a modelação dos aquíferos Botucatu e Serra Geral, na região urbana de Ribeirão Preto-SP, responsáveis pelo abastecimento doméstico e industrial desta cidade.

(a) Professores do Departamento de Hidráulica e Saneamento da Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

Modelação do Manancial Subterrâneo de Ribeirão Preto
2. Modelação Matemática

1. Introdução

O estudo proposto visa ao desenvolvimento de um modelo numérico aplicável a sistemas de aquíferos abertos superpostos, capaz de se ajustar às peculiaridades inerentes a cada manancial. A partir de informações de parâmetros hidráulicos dos aquíferos e de fluxos e piezometrias do contorno, pretende-se simular os escoamentos subterrâneos e obter os níveis piezométricos no domínio em questão, levando-se em consideração a heterogeneidade e anisotropia de cada sistema, bem como as descargas de poços e fontes existentes.

Para Ribeirão Preto, espera-se que o modelo reproduza a piezometria existente, através de calibrações necessárias dos parâmetros hidrodinâmicos concernentes, bem como dos fatores físicos envolvidos. A caracterização hidráulica do domínio de Ribeirão Preto é desenvolvida no primeiro artigo desta série. As simulações estão em fase de desenvolvimento na Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

O domínio em estudo é caracterizado pela superposição de dois aquíferos abertos, separados por uma camada semi-impermeável intermediária. O aquífero superior é fraturado e freático; no modelo será assumido contínuo e anisotrópico, com REV's de 1 km^2; o inferior é um arenito parcialmente homogêneo e isotrópico atravessado localmente por diques e sills, semi-confinado em parte do domínio pelo aquífero superior e aflorante em algumas regiões. A interação vertical entre esses aquíferos é intensa, sendo inclusive superior ao fluxo subterrâneo horizontal que entra ou sai do domínio. Os poços em Ribeirão Preto exploram predominantemente o arenito inferior. Em algumas regiões, o intenso bombeamento rebaixou a piezometria a níveis inferiores ao do topo do aquífero, conduzindo este último a assumir localmente, comportamento freático.

2. Metodologia

Para a Formação Serra Geral, **puramente fraturada** em Ribeirão Preto, pode-se derivar, conforme propõe SNOW (1969), a expressão do tensor de condutividade hidráulica em cada **REV** em função das orientações de fissuras obtidas estatisticamente.

Para duas famílias de fissuras superpostas em um mesmo **REV** (de dimensões unitárias), de orientações θ_{f1} e θ_{f2} (Figura 1), assumindo a hipótese da independência de escoamentos nas intersecções, o tensor de permeabilidade total $[\mathbf{K}]_{\mathbf{REV}}$ será a soma dos tensores para cada família, isto é,

$$[K]_{REV} = \frac{2}{3}\frac{g}{\upsilon}\left[\left(\sum_{i-1}^{NF_1}\frac{b_i^3}{\Delta_1}\right)\begin{bmatrix} 1-\operatorname{sen}^2\theta_{f1} & \cos\theta_{f1}\operatorname{sen}\theta_{f1} \\ \operatorname{sen}\theta_{f1}\cos\theta_{f1} & 1-\cos^2\theta_{f1}\end{bmatrix} + \right.$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{NF_2}\frac{b_j^3}{\Delta_2}\right)\left[\begin{array}{cc} 1-\operatorname{sen}^2\theta_{f2} & \cos\theta_{f2}\operatorname{sen}\theta_{f2} \\ \operatorname{sen}\theta_{f2}\cos\theta_{f2} & 1-\cos^2\theta_{f2}\end{array}\right]\Bigg] \qquad (1)$$

com

$$NF_1 = \frac{1}{\Delta_1}\left(\operatorname{sen}\theta_{f1}+\cos\theta_{f1}\right)-1 \qquad (2)$$

e

$$NF_2 = \frac{1}{\Delta_2}\left(\operatorname{sen}\theta_{f2}+\cos\theta_{f2}\right)-1 \qquad (3)$$

onde: $\mathbf{NF_1}$ e $\mathbf{NF_2}$ são os números de fissuras das famílias 1 e 2 no **REV**, respectivamente; $\boldsymbol{\Delta_1}$ e $\boldsymbol{\Delta_2}$ são os espaçamentos médios entre fissuras das famílias **1** e **2**, respectivamente; $\mathbf{2b_i}$ é a abertura da fissura **i**; $\boldsymbol{\theta_{f1}}$ e $\boldsymbol{\theta_{f2}}$ são as orientações das famílias **1** e **2** em relação ao eixo $\mathbf{x_1}$ do sistema de coordenadas local ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$) (Figura 1) e **g** e $\boldsymbol{\nu}$ são a aceleração da gravidade e a viscosidade cinemática da água, respectivamente.

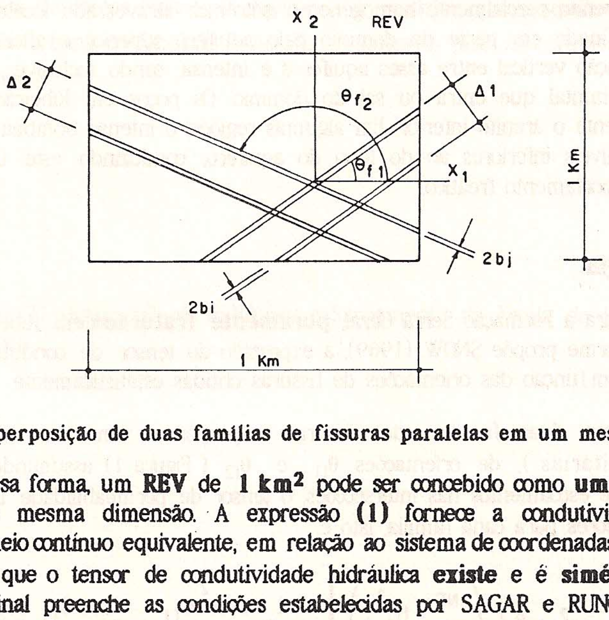

Fig. 1. Superposição de duas famílias de fissuras paralelas em um mesmo **REV**.

Dessa forma, um **REV** de **1 km²** pode ser concebido como **um meio poroso equivalente** de mesma dimensão. A expressão **(1)** fornece a condutividade hidráulica anisotrópica do meio contínuo equivalente, em relação ao sistema de coordenadas locais ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$). Deve-se salientar que o tensor de condutividade hidráulica **existe** e é **simétrico**, uma vez que o meio original preenche as condições estabelecidas por SAGAR e RUNCHAL [1982], a saber: fraturas infinitas, paredes planas nas fissuras e locação em um plano ortogonal.

O tensor em **(1)** pode também ser expresso por:

$$[K]_{REV} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{22} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2), com

$$K_{11} = \frac{2}{3}\frac{g}{\upsilon}\left(\left(\sum_{i=1}^{NF_1}\frac{b_i^3}{\Delta_1}\right)\left(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta_{f1}\right) + \left(\sum_{j=1}^{NF_2}\frac{b_j^3}{\Delta_2}\right)\left(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta_{f2}\right)\right) \quad \textbf{(5)}$$

$$K_{21} = K_{12} = \frac{2}{3}\frac{g}{\upsilon}\left(\left(\sum_{i=1}^{NF_1}\frac{b_i^3}{\Delta_1}\right)\cos\theta_{f1}\ \mathrm{sen}\,\theta_{f1} + \left(\sum_{j=1}^{NF_2}\frac{b_j^3}{\Delta_2}\right)\cos\theta_{f2}\ \mathrm{sen}\,\theta_{f2}\right) \quad \textbf{(6)}$$

$$K_{22} = \frac{2}{3}\frac{g}{\upsilon}\left(\left(\sum_{i=1}^{NF_1}\frac{b_i^3}{\Delta_1}\right)\left(1 - \cos^2\theta_{f1}\right) + \left(\sum_{j=1}^{NF_2}\frac{b_j^3}{\Delta_2}\right)\left(1 - \cos^2\theta_{f2}\right)\right) \quad \textbf{(7)}$$

As condutividades principais K_{xx} e K_{yy}, associadas às direções de máxima e mínima condutividades, valem:

$$K_{xx} = -\frac{K_{11} - K_{22}}{2}\ \mathrm{sen}\,2\sigma + K_{12}\cos 2\sigma \quad \textbf{(8)}$$

$$K_{yy} = \frac{K_{11} + K_{22}}{2} - \frac{K_{11} - K_{22}}{2}\cos\sigma - K_{12}\ \mathrm{sen}\,2\sigma \quad \textbf{(9)}$$

em relação às direções principais (x, y), onde

$$\sigma = \frac{1}{2}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{K_{12}}{(K_{11} - K_{22})} \quad \textbf{(10)}$$

é o ângulo entre os eixos x e x_1.

Em cada **REV** as direções principais de condutividade podem ser obtidas, então, através de uma rotação anti-horária de um ângulo σ do sistema de coordenadas (x_1, x_2), com σ dado por **(10)**.

No que se refere ao aquitarde entre o Serra Geral e o Botucatu, apresentando pequena espessura em relação ao sistema como um todo, é razoável supor curtos períodos transientes nessa camada, devidos a sua armazenabilidade.

Para resolução das equações diferenciais que regem o escoamento nos aquíferos será utilizado o Método dos Elementos Finitos, para a discretização do domínio e o Método das Diferenças Finitas para a discretização temporal. Os elementos utilizados serão triângulos, devido à grande simplicidade e flexibilidade desses elementos na descrição de contornos irregulares. Na parte do domínio correspondente ao sistema de aquíferos abertos, o modelo numérico adotará malhas bidimensionais de mesma geometria nos aquíferos superior e inferior, ligadas através de cordões de elementos finitos lineares através do aquitarde (Fig. 2).

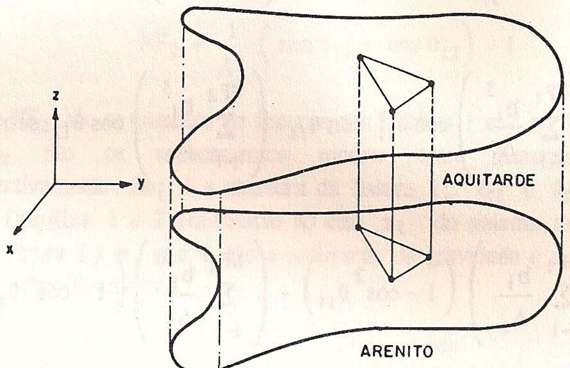

Fig. 2. Discretização típica quase-tridimensional utilizada para o sistema de aquíferos abertos.

FUJINAWA (1977, a) destaca que a adoção de um único elemento linear nos cordões verticais introduz erros apenas para baixos tempos de simulação, principalmente nos casos onde é elevado o contraste entre coeficientes de armazenabilidade nos aquíferos e no aquitarde. Uma vez que os intervalos de tempo do processo transiente no modelo proposto deverão ser elevados, a adoção de um elemento linear parece razoável.

O modelo integrado aquíferos-aquitarde apresentará então elementos finitos unidimensionais, um em cada cordão, para solução do escoamento vertical no aquitarde, e elementos finitos bidimensionais, para solução das equações do escoamento horizontal nos aquíferos. Assumindo-se os eixos coordenados colineares com as direções principais de condutividade, o escoamento em um dado **REV** do aquífero fraturado freático pode ser expresso por:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Kxx_1\ h_1\ \frac{\partial h_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Kyy_1\ h_1\ \frac{\partial h_1}{\partial y}\right)-Q_1(x,y,t)-qv_1=Sy_1\frac{\partial h_1}{\partial t} \qquad \textbf{(11)}$$

onde $\mathbf{Kxx_1}$ e $\mathbf{Kyy_1}$ são as condutividades principais no **REV** em questão, $\mathbf{Sy_1}$ a armazenabilidade, $\mathbf{h_1}$ a carga no aquífero, $\mathbf{Q_1(x,y,t)}$ a extração através de poços no aquífero e $\mathbf{qv_1(x,y,t)}$ o fluxo entre o aquífero fraturado e o aquitarde.

No caso de afloramento do arenito Botucatu tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_2\, h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\, h_2 \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) - Q_2(x,y,t) = Sy_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} \qquad (12)$$

onde K_2 é a condutividade isotrópica do arenito, h_2 a sua carga hidráulica, $Q_2(x,y,t)$ a extração neste aquífero e Sy_2 a armazenabilidade.

Para o escoamento horizontal no arenito Botucatu confinado, pode-se exprimir

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_2 \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) - Q_2(x,y,t) - qv_2(x,y,t) = S_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} \qquad (13)$$

onde T_2 é a transmissividade do arenito confinado, $Q_2(x,y,t)$ a extração no aquífero, S_2 sua armazenabilidade e qv_2 o fluxo vertical através do aquitarde superior.

A Figura 3 ilustra a situação para o arenito Botucatu semi-confinado superposto pelo Serra Geral.

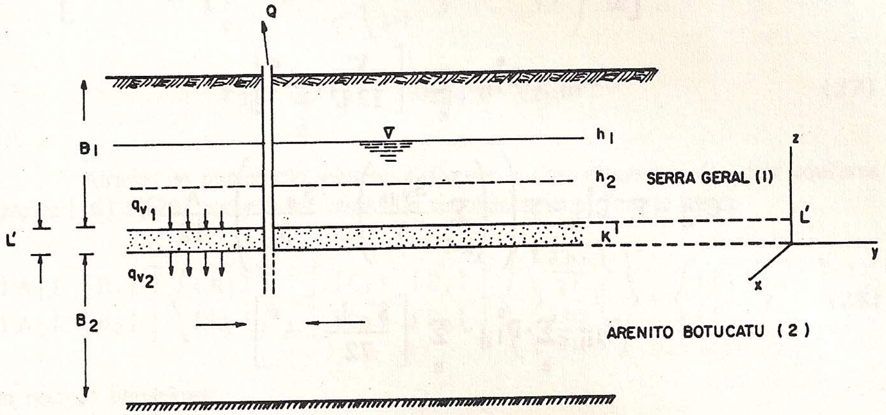

Fig. 3. Sistema de aquiferos abertos destacando-se o fluxo vertical através do aquitarde intermediário.

A formulação do escoamento no aquitarde, através do método de Galerkin, para uma malha constituída de um único elemento linear em cada cordão vertical, fornece (FUJINAWA (1977, a)):

$$qv_1 = \frac{K'}{L'}\left(h_1 - h_2\right) + S'_0\, L'\left(\frac{1}{3}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{6}\frac{\partial h_2}{\partial t}\right) \qquad (14)$$

$$qv_2 = -\frac{K'}{L'}\left(h_1 - h_2\right) + S'_0\, L' \left(\frac{1}{6}\,\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{3}\,\frac{\partial h_2}{\partial t}\right) \tag{15}$$

onde a indexação nas cargas refere-se ao Serra Geral **(1)** e ao Botucatu **(2)**, **K'** a condutividade hidráulica do aquitarde, **L'** a sua espessura e S'_o sua armazenabilidade específica.

Substituindo-se o fluxo qv_1 da equação **(11)** pela expressão **(14)**, e aplicando-se a integração de Galerkin tem-se a equação global para o Serra Geral:

$$\left[A_1\right]\left\{h_1\right\} + \left[B_1\right]\left\{h_2\right\} + \left[C_1\right]\left\{\frac{\partial h_1}{\partial t}\right\} + \left[D_1\right]\left\{\frac{\partial h_2}{\partial t}\right\} = \left\{F_1\right\} \tag{16}$$

com

$$A_{1ij} = \sum_{\varepsilon} A^e_{1ij} = \sum_e \left[\left(\sum_{k=1}^{3}\left(Txx_{1k}\,\frac{b_i^e\, b_j^e}{12\, A^e} + Tyy_{1k}\,\frac{c_i^e\, c_j^e}{12\, A^e}\right)\right) + \frac{mk'}{12\, L'}\, A^e\right] \tag{17}$$

$$B_{1ij} = B^e_{1ij} = \sum_e -\left[\frac{K'}{12\, L'}\cdot A^e\right] \tag{18}$$

$$C_{1ij} = \sum_e C^e_{1ij} = \sum_e \left(\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{Sy_{1k}}{3}\right) + \frac{S'_0\, L'}{3}\right)\frac{A^e}{12}\, m \tag{19}$$

$$D_{1ij} = \sum_e D^e_{1ij} = \sum_e \left[\frac{S'_0\, L'}{72}\cdot A^e\right] \tag{20}$$

$$F_{1ij} = \sum_e F^e_{1ij} = -Q_{1wi} + Q_{1bi} \tag{21}$$

onde o somatório é realizado sobre os elementos adjacentes ao nó **i** da malha de elementos finitos, A^e é a área do elemento em questão, b_i^e e c_i^e são coeficientes geométricos (CHORLEY & FRIND (1978)), $m = 2$ para $i = j$ e $m = 1$ para $i \neq j$.

Q_{1wi} é a descarga do poço do nó **i**, enquanto Q_{1bi} é a alimentação nodal equivalente no contorno do domínio, para o interior do elemento em questão.

Aplicando-se o método de Galerkin à equação **(13)** tem-se a expressão global para o arenito Botucatu nas regiões de confinamento.

$$[A_2]\{h_1\} + [B_2]\{h_2\} + [C_2]\left\{\frac{\partial h_1}{\partial t}\right\} + [D_2]\left\{\frac{\partial h_2}{\partial t}\right\} = [F_2] \quad \mathbf{(22)}$$

com

$$A_{2ij} = \sum_e A_{2ij}^e - \sum_e - \left[\frac{mK'}{12\,L'}\,A^e\right] \quad \mathbf{(23)}$$

$$B_{2ij} - \sum_e B_{2ij}^e - \sum_e \left[\left(\sum_{k-1}^{3} T_{2k}\,\frac{b_i^e\,b_j^e + c_i^e\,c_j^e}{12\,A^e}\right) + \frac{m\,K'}{12\,L'}\right] \quad \mathbf{(24)}$$

$$C_{2ij} = \sum_e C_{2ij}^e - \sum_e \frac{S'_o\,L'\,A^e}{72} \quad \mathbf{(25)}$$

$$D_{2ij} = \sum_e D_{2ij}^e - \sum_e \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{S_{2k}}{3} + \frac{S'_o L'}{3}\right)\frac{A^e}{12}\,m \quad \mathbf{(26)}$$

$$F_{2i} = \sum_e F_{2i} - Q_{2_{wi}} + Q_{2_{bi}} \quad \mathbf{(27)}$$

Através da numeração sequencial dos nós e dos elementos dos dois aquíferos, as equações **(16)** e **(20)** poderão ser resolvidas simultaneamente. Tem-se assim:

$$\begin{bmatrix} [A_1] & [B_1] \\ [A_2] & [B_2] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{h_1\} \\ \{h_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_1] & [D_1] \\ [C_2] & [D_2] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \left\{\frac{\partial h_1}{\partial t}\right\} \\ \left\{\frac{\partial h_2}{\partial t}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{(28)}$$

ou, em notação simplificada

$$[H]\{h\} + [P]\left\{\frac{\partial h}{\partial t}\right\} = \{F\} \quad \mathbf{(29)}$$

Para o arenito aflorante, o Método de Galerkin aplicado à **(12)** fornece:

$$[H_2]\{h_2\} + [P_2]\left\{\frac{\partial h_2}{\partial t}\right\} = \{F_2\} \quad \mathbf{(30)}$$

com

$$H_{1ij} = \sum_e H_{2ij} - \sum_e \left(\sum_{k-1}^{3} T_{2k}\,\frac{b_i^e\,b_j^e + c_i^e\,c_j^e}{12\,A^e}\right) \quad \mathbf{(31)}$$

$$P_{1ij} = \sum_{e} P_{2ij} - \sum_{e} \left(\sum_{k=1}^{3} Sy_{2k} \right) \frac{A^e}{36} \; m \tag{32}$$

$$F_{2i} = \sum_{e} F_{2i} - -Q_{2_{wi}} + Q_{2_{bi}} \tag{33}$$

A mudança de regime confinado para freático ou vice-versa pode ser facilmente implementada no modelo, bastando-se para tal, alteração no cálculo da transmissividade e mudança no valor da armazenabilidade do aquífero. Por exemplo, caso o Botucatu, sob o Serra Geral, adquira condições freáticas, a transmissividade na expressão **(24)** deverá ser calculada através da equação $T = K.h$ e não mais a partir de $T = K.b$; a armazenabilidade deverá ser aumentada e igualada à porosidade efetiva do arenito.

Para a análise do escoamento transiente nos aquíferos freáticos, as transmissividades serão obtidas com a extrapolação de cargas hidráulicas em tempos anteriores (PINDER (1977)). O modelo consistirá, então da resolução do sistema formado pela reunião das equações **(29)** e **(30)**.

No que se refere à inicialização do modelo, esta deverá ser efetuada a partir de uma solução permanente aproximada, onde se despreze a armazenabilidade do aquitarde e não se leve em consideração o bombeamento no domínio.

O fluxo no contorno poderá ser simulado a partir de um valor médio de gradiente hidráulico no sentido E-W, desde que se estime a transmissividade nas regiões de fronteira. No entanto, os fluxos de contorno só podem ser expressos realisticamente a partir de dados de níveis estáticos de poços piezométricos a serem instalados na fronteira do domínio.

A proposta de **calibração** do estudo envolve a reprodução dos dados de níveis dinâmicos do domínio.

Para a atenuação de acentuadas discrepâncias entre os níveis piezométricos reais e simulados, deve-se proceder a inferências nos parâmetros hidrodinâmicos dos aquíferos e em fatores físicos tais como fluxos de entrada ou saída.

O modelo poderá ser utilizado para previsão de piezometrias futuras, a partir dos valores obtidos para os níveis dinâmicos atuais.

Conclusões

Em virtude da carência atual de dados, o número de graus de liberdade no modelo é bastante elevado para se esperar uma calibração realista do sistema.

Os parâmetros hidrodinâmicos do Botucatu aflorante, do Botucatu semi-confinado, do Serra Geral e do aquitarde intermediário são imprecisos. Os fatores hidrológicos envolvidos tais como recarga horizontal no contorno, recarga nas regiões de afloramento do Botucatu e percolação profunda são pouco conhecidos.

Assim, discrepâncias entre valores piezométricos reais e simulados em uma dada região não poderão ser ainda isoladamente atribuídos a um dado fator hidrológico ou a um parâmetro hidrodinâmico específico, mas sim a grupos de fatores e parâmetros envolvidos.

A calibração do modelo conduzirá, possivelmente, tanto a parâmetros hidráulicos quanto a fatores hidrológicos irreais, não permitindo o conhecimento da hidrodinâmica natural ao sistema. No entanto, o modelo permitirá o planejamento de instalações piezométricas de controle, levantamentos hidrogeológicos localizados necessários para o entendimento dos aquíferos, e principalmente, o início do gerenciamento dos recursos hídricos subterrâneos da cidade de Ribeirão Preto.

Lista Bibliográfica

[1] BEAR, J. "Dynamics of Fluids in Porous Media". Elsevier, New York, 1972.

[2] BEAR, J. "Hydraulics of Groundwater". Israel, McGraw-Hill, 1979.

[3] CHORLEY, D. W. & FRIND, E. D. "An Iterative Quasi-Three-Dimensional Finite Element Model for Heterogeneous Multiaquifer Systems". Water Resources Research, 14 (5): 943-952, 1978.

[4] CIRILO, J. A., CABRAL, J. J. S. P., FRANÇA, H. P. M. & NETO, B. G. M. V. "Utilização de Modelos Matemáticos para Acompanhamento da Exploração de Aquíferos Confinados ou Semi-Confinados:. Recife - PE, ainda não publicado.

[5] FUJINAWA, K. "Finite Element Analysis of Groundwater Flow in Multiaquifer Systems: The Behavior of Hydrological Properties in an Aquitard while being pumped". Journal of Hydrology, 33: 59-72, 1977.

[6] FUJINAWA, K. "Finite Element Analysis of Groundwater Flow in Multiaquifer Systems: a Quasi-Three-Dimensional Flow Model". Journal of Hydrology, 33: 349-362, 1977.

[7] PINDER, G. F., FRIND, E. O. & PAPADOPULOS, S. S. "Functional Coefficients in the Analysis of Groundwater Flow". Water Resources Research, 9 (1): 222-226, 1973.

[8] PINDER, G. F. & GRAY, W. G. "Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology". Academic Press, New Yor,k, 1977.

[9] SAGAR, B. & RUNCHAL, A. "Permeability of Fractured Rock: Effect of Fracture Size and Uncentainties". Water Resources Research, 18 (6): 266-274, 1982.

[10] SNOW, D. T. "Anisotropic Permeability of Fractured Media". Water Resources Research, 5 (6): 1273-1289, 1969.