



## MÉTODO DE ELEMENTOS ANALÍTICOS: UMA ALTERNATIVA PARA A MODELAGEM DE ESCOAMENTO SUBTERRÂNEO

*ANALYTIC ELEMENT METHOD: AN ALTERNATIVE FOR GROUNDWATER FLOW MODELING.*

Mariano Franca Alencar<sup>1</sup>, Edson Cezar Wendland<sup>2</sup>

Artigo recebido em: 04/05/2011 e aceito para publicação em: 12/12/2011

**Abstract:** The Analytic Element Method (AEM) is used for modeling of groundwater flow in sedimentary media, especially in the study of regional aquifers. By not requiring a domain discretization, the AEM presents an important alternative to the finite difference (FDM) and finite element methods (FEM), traditionally applied to groundwater flow. This paper presents the AEM with special emphasis on the concepts: linear superposition of solutions, potential discharge and potential complex. A conceptual problem containing the main hydrogeological structures, treated here as elements: well, river, lake and inhomogeneity is presented. A one-dimensional analysis with special emphasis on the influence of each element in the final solution is developed. The linear system assemblage is also discussed since it represents a main step in the computational implementation of the method, which can be executed in a geographic information system (GIS) environment.

**Keywords:** Analytic Element Method. Groundwater. Regional Aquifer.

**Resumo:** O Método de Elementos Analíticos (AEM, acrônimo em inglês) é utilizado para a modelagem de fluxo de águas subterrâneas em meio sedimentar, sobretudo no estudo de aquíferos regionais. Por não precisar discretizar o domínio analisado, o AEM firmou-se como importante alternativa aos métodos de diferenças finitas (MDF) e elementos finitos (MEF), tradicionalmente aplicados ao problema de fluxo subterrâneo. O presente artigo apresenta o AEM por meio de sua formulação básica com especial destaque para os conceitos: superposição de soluções lineares; potencial de descarga e potencial complexo. É apresentado um problema conceitual contendo as principais estruturas hidrogeológicas, tratadas aqui como elementos: poço, rio, inhomogeneidade e lago. Uma análise unidimensional é feita com especial ênfase à influência de cada elemento na solução final apresentada. A montagem do sistema linear final também é discutida em profundidade por compor a principal etapa para a implementação computacional do método, que por sua vez pode ser efetivada em ambiente de sistemas de informações geográficas (SIG).

**Palavras-Chave:** Método de Elementos Analíticos. Água Subterrânea. Aquíferos regionais.

## 1 INTRODUÇÃO

Para a simulação do escoamento em aquíferos, os métodos numéricos tradicionais como o Método de Diferenças Finitas (MDF) e de Elementos Finitos (MEF) discretizam a área estudada em uma malha de pontos onde as cargas hidráulicas serão calculadas. Quanto maior o número de pontos, maior o esforço computacional envolvido na resolução do problema. Em aquíferos regionais, os métodos tradicionais (MDF ou MEF) requerem um número muito elevado de pontos discretizados e grande esforço computacional para obtenção de resultados nem sempre satisfatórios.

O Método de Elementos Analíticos (AEM), por outro lado, trata os elementos hidrogeológicos que agem sobre o escoamento subterrâneo na forma de soluções analíticas

individuais que são reunidas linearmente, pelo princípio da superposição, para compor a solução final em termos do potencial de descarga (STRACK, 1989), que por sua vez é uma função da carga hidráulica. Além disso, o AEM acolhe em sua estrutura diferentes formas de resolução das equações que regem o fluxo subterrâneo, favorecendo a investigação científica dos conceitos físicos que envolvem o escoamento em meio poroso.

O forte embasamento físico-matemático torna o Método de Elementos Analíticos uma ferramenta poderosa e promissora, sobretudo no trato de aquíferos sedimentares regionais e grandes aluviões. No Brasil, Gomes (2002) aplicou o método no estudo de aluviões na região do Cariri, estado do Ceará. Wendland et al. (2004) e Batista (2006)

<sup>1</sup> Professor do Instituto Federal de Tecnologia do Ceará, Departamento de Construção Civil. (mariano@ifce.edu.br).

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Hidráulica e Saneamento da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (ew@sc.usp.br).

aplicaram o método no estudo do fluxo subterrâneo no entorno da lagoa do Bonfim no estado no Rio Grande do Norte. Franca Alencar (2008) fez contribuições teóricas ao método e aprofundou sua interação com Sistemas de Informações Geográficas (SIG), tendo sua área de estudo também no entorno da Lagoa do Bonfim – RN. Strack et al. (2009) apresentam uma revisão dos fundamentos do Método de Elementos Analíticos e princípios aplicações no contexto internacional.

Este trabalho introduz os conceitos básicos do escoamento subterrâneo e define as soluções analíticas dos principais elementos hidrogeológicos (poço, rio, inomogeneidade e lago circular) que compõe o método – chamados de elementos analíticos. A seção 2 do artigo apresenta as equações governantes do fluxo subterrâneo em termos do conceito de potencial de descarga e sua relação com a carga hidráulica. A seção 3 aborda o princípio físico da superposição, com destaque para um exemplo de fluxo de águas subterrâneas. Na seção 4, encontra-se a formulação das soluções analíticas dos elementos hidrogeológicos encontrados com mais frequência no estudo do escoamento subterrâneo.

Uma aplicação conceitual unidimensional, na forma de um corte vertical em uma área contendo todos os elementos apresentados, é destacada na seção 5 com especial ênfase na superposição das soluções individuais e a composição do sistema linear final. Devido a sua importância, a montagem do sistema linear obtido pelo AEM é aprofundada na seção 6.

O desenvolvimento matemático apresentado é baseado nas referências Bear (1972), Strack (1989), Haitjema (1995) e Strack (2003).

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO FLUXO SUBTERRÂNEO

A descarga ( $Q$ ) em uma direção  $j$  pode ser descrita pela integral do fluxo específico ou velocidade de Darcy ( $q$ ) ao longo da espessura saturada ( $h$ ) do aquífero:

$$Q_j = \int_0^h q_j dz \quad (1)$$

Adotando as hipóteses de Dupuit-Forchheimer (BEAR, 1972),  $q_j$  não varia ao longo da espessura saturada do aquífero. De acordo com a Figura 1, tem-se:

- Escoamento confinado, com espessura molhada  $h = H$ :

$$Q_x = Hq_x; \quad Q_y = Hq_y \quad (2)$$

Introduzindo a definição de  $q_j$  dada pela Lei de

Darcy  $q_j = -K \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$  (BEAR, 1972), tem-se:

$$Q_x = H \left[ -K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} [KH\phi] \quad (3)$$

$$Q_y = H \left[ -K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} [KH\phi]$$

em que  $\phi$  é a carga hidráulica e  $K$ , a condutividade hidráulica do meio poroso considerado isotrópico e homogêneo em regiões bem definidas de mesma condutividade hidráulica.

- Escoamento livre, com a espessura da camada saturada dada pela carga hidráulica  $h = \phi$ .

$$Q_x = \phi q_x \quad Q_y = \phi q_y \quad (4)$$

Considerando novamente a Lei de Darcy, a descarga será dada por:

$$Q_x = \phi \left[ -K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{K\phi^2}{2} \right] \quad (5)$$

$$Q_y = \phi \left[ -K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{K\phi^2}{2} \right]$$

A partir das equações 3 e 5, define-se o potencial de descarga ( $\Phi$ ) na forma da equação (6) para aquífero confinado e (7) para aquífero livre.

$$\Phi = KH\phi + cte_1 \quad (6)$$

$$\Phi = \frac{K\phi^2}{2} + cte_2 \quad (7)$$

A descarga pode agora ser expressa em termos do potencial de descarga, unificando as formulações para aquíferos livre e confinado:

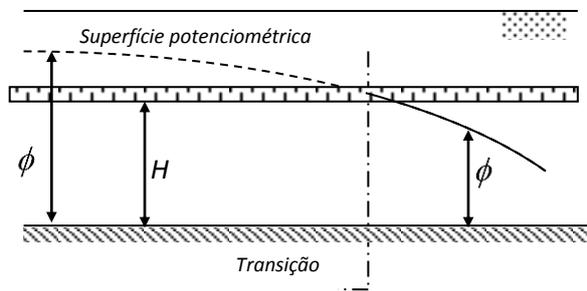
$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (8)$$

O potencial de descarga  $\Phi$  é uma quantidade abstrata que pode ser determinada a partir da carga hidráulica  $\phi$ , conhecidas as características do aquífero (HAITJEMA, 1995). Além da unificação da formulação e linearização das equações governantes, o uso do potencial de descarga encapsula variações da condutividade hidráulica, possibilitando sua modelagem por partes (regiões bem definidas de mesma condutividade hidráulica).

Assumindo continuidade do potencial de descarga na seção de transição entre as zonas confinada e livre do escoamento, Figura 1, as equações (6) e (7) podem ser igualadas. Adotando-se  $cte_2 = 0$  (STRACK, 1989) obtém-se:

$$\Phi = KH\phi - \frac{1}{2}KH^2 \quad \text{para } \phi > H;$$

$$\Phi = \frac{1}{2}K\phi^2 \quad \text{para } \phi \leq H \quad (9)$$



$H$  - espessura do aquífero confinado;  $\phi$  - carga hidráulica.

**Figura 1** – Transição entre zona confinada e livre.  
**Figure 1** – Transition between confined and unconfined zone.

### 2.1 EQUAÇÃO GERAL DE FLUXO

Para o caso de escoamento livre e considerando a recarga  $N$  distribuída uniformemente sobre a área do volume de controle e com a descarga constante ao longo da direção vertical, a equação da continuidade para a descarga pode ser escrita para o plano  $xy$ :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = N \quad (10)$$

Introduzindo a definição do potencial de descarga, equações (8) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -N \quad (11)$$

A equação (11) é a Equação de Poisson para o potencial de descarga. Para o caso de não existir recarga transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

que é a Equação de Laplace, aplicada ao potencial de descarga. O método pode ser aplicado indistintamente para escoamentos confinados ou livres, considerando as equações (9).

### 3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

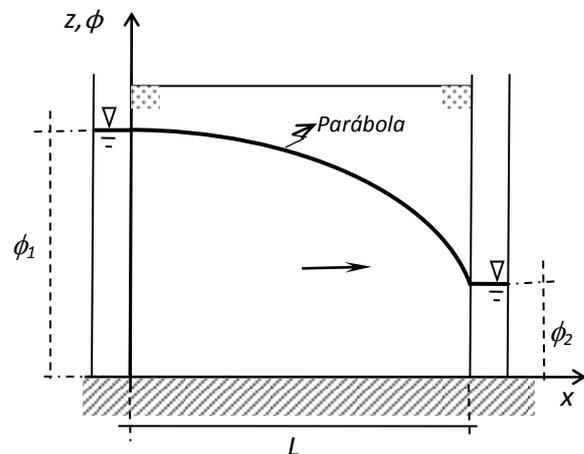
O Método de Elementos Analíticos baseia-se no Princípio da Superposição, segundo o qual, qualquer problema linear pode ser separado em partes que são resolvidas individualmente e posteriormente suas soluções são combinadas na solução final.

### 3.1 EXEMPLO DA SUPERPOSIÇÃO DO POTENCIAL DE DESCARGA

Um exemplo de superposição é o caso do escoamento livre unidimensional entre drenos na presença de recarga (BEAR, 1972). Para resolver o problema, pode-se dividir a solução em dois casos conceituais, I e II. O caso I considera apenas o escoamento devido aos drenos e o caso II somente devido à recarga.

**I. Escoamento livre entre cargas constantes;** o problema físico impõe que o gradiente hidráulico seja variável e a superfície livre é descrita por uma parábola, de acordo com a Figura 2. A solução em termos de carga hidráulica ( $\phi$ ) é dada por:

$$\phi^2 = \left( \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{L} \right)x + \phi_1^2 \quad (13)$$



**Figura 2** – Carga hidráulica para escoamento entre drenos.

**Figure 2** – Hydraulic head to flow between drains.

Desenvolvendo o problema em termos do potencial de descarga ( $\Phi$ ), a solução para o caso unidimensional da Equação de Laplace  $\nabla^2 \Phi_L = 0$  é dada por uma reta  $\Phi_L = ax + b$ . Aplicando as condições de contorno  $\Phi_L = \Phi_1$  para  $x=0$  e  $\Phi_L = \Phi_2$  para  $x=L$ , as constantes  $a$  e  $b$  são definidas e o potencial de descarga (Figura 3), para o caso I, será dado pela equação:

$$\Phi_{Laplace} = \Phi_L = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{L}x + \Phi_1 \quad (14)$$

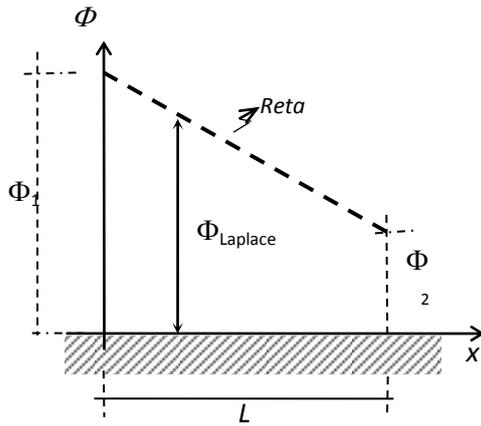


Figura 3 – Potencial de descarga para escoamento entre drenos.

Figure 3 – Discharge potential to flow between drains.

**II. Escoamento devido à recarga:** Para o caso II, observa-se que a cargas hidráulicas nos drenos (condição de contorno) são nulas. A distribuição de carga hidráulica (Figura 4) é descrita por uma elipse de acordo com a equação:

$$\phi^2 = -\frac{N}{K}x^2 + \frac{NL}{K}x \quad (15)$$

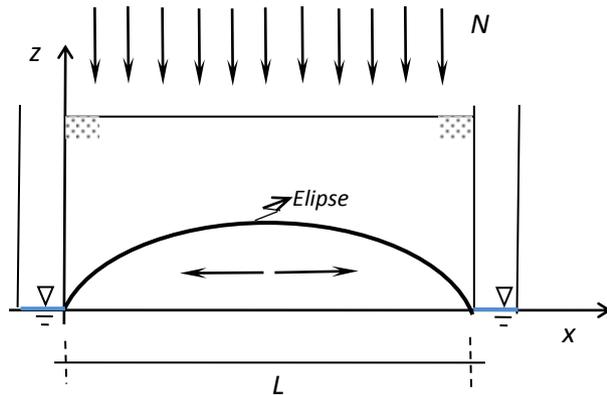


Figura 4 – Carga hidráulica para escoamento devido à recarga.

Figure 4 – Hydraulic head to distributed recharge.

Desenvolvendo o problema em termos do potencial de descarga, o escoamento é descrito pela Equação de Poisson  $\nabla^2 \Phi_p = -N$ . A integração na direção  $x$  resulta em:

$$\Phi_p = -\frac{N}{2}x^2 + cx + d \quad (16)$$

Aplicando a condição de contorno  $\Phi_p = 0$  para  $x = 0$  e para  $x = L$ , definindo as constantes  $c$  e  $d$ , o potencial de descarga (Figura 5) para o caso II será dado pela equação:

$$\Phi_{Poisson} = \Phi_p = -\frac{N}{2}x^2 + \frac{NL}{2}x \quad (17)$$

A solução final em termos do potencial de descarga

(Figura 6) é dada pela soma algébrica (superposição) das soluções.

$$\Phi = \Phi_L + \Phi_p \quad (18)$$

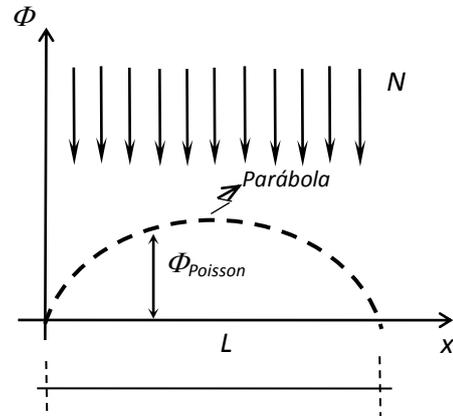


Figura 5 – Potencial de descarga para escoamento devido à recarga.

Figure 5 – Discharge potential to distributed recharge.

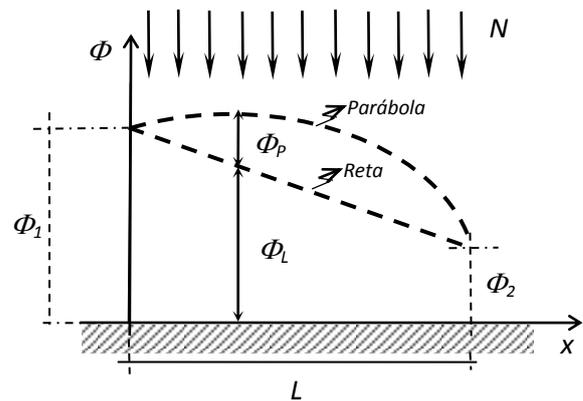


Figura 6 – Superposição das soluções dos casos I e II.

Figure 6 – Superposition of solutions.

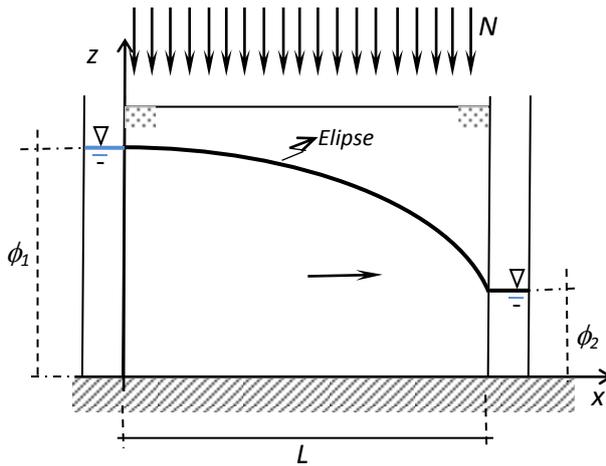
Consequentemente

$$\Phi = -\frac{N}{2}x^2 + \left(\frac{NL}{2} + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{L}\right)x + \Phi_1 \quad (19)$$

Lembrando que para o escoamento livre, a relação entre o potencial de descarga e a carga hidráulica é dada por  $\Phi = \frac{K\phi^2}{2}$ , a solução em termos da carga hidráulica é obtida como:

$$\phi^2 = -\frac{N}{K}x^2 + \left(\frac{NL}{K} + \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{L}\right)x + \phi_1^2 \quad (20)$$

O gráfico da superfície livre é ilustrado pela Figura 7, e descreve uma elipse conforme a equação (20).



**Figura 7** – Solução final em termos da carga hidráulica.  
**Figure 7** – Hydraulic Head final solution.

**4 FORMULAÇÃO DOS PRINCIPAIS ELEMENTOS ANALÍTICOS**

O AEM é baseado na superposição de soluções analíticas das equações diferenciais que governam o problema. Cada solução refere-se a um elemento hidrogeológico com seus parâmetros e graus de liberdade correspondentes. Na prática, cada elemento analítico satisfaz as condições de contorno exigidas. A solução final é, então, construída pela soma dos efeitos de todos os elementos envolvidos.

Os efeitos de cada solução analítica são computados em termos do potencial de descarga, entretanto, as soluções para a equação de Laplace aparecem em pares, de forma a satisfazer as condições de Cauchy – Riemann (SPIEGEL, 1972).

Nesses casos a função conjugada  $\Psi$  representa as linhas de fluxo (ou de corrente) do escoamento. Ambas (potencial de descarga e funções de fluxo) podem ser representadas conjuntamente pelo Potencial Complexo:

$$\Omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z) \tag{21}$$

A adoção desse potencial complexo viabiliza o uso da teoria das funções complexas e teoria do potencial para a resolução de problemas de escoamento subterrâneo, além de possibilitar, no mesmo cálculo, o estudo simultâneo do potencial de descarga e funções de fluxo.

**4.1 PONTO DE EXTRAÇÃO OU INJEÇÃO**

Seja  $W[L^3T^{-1}]$  a taxa de extração ou injeção de água em um poço no aquífero. Tomando-se o escoamento radial, define-se a descarga radial  $Q_r [L^2T^{-1}]$  como vazão por unidade de comprimento de um círculo de raio  $r$  ao redor do ponto de injeção/extração:

$$Q_r = -\frac{W}{2\pi r} \tag{22}$$

Em termos da lei de Darcy e do potencial de descarga (8), define-se:

$$Q_r = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{23}$$

Igualando as expressões (22) e (23) e integrando, obtém-se:

$$\int d\Phi = \int \frac{W}{2\pi r} dr \tag{24}$$

A equação analítica resulta em:

$$\Phi = \frac{W}{2\pi} \ln r + \Phi_0 \tag{25}$$

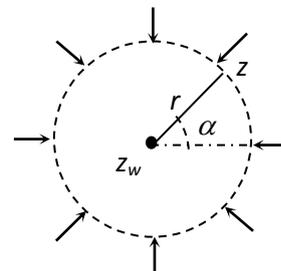
As linhas de fluxo radiais em termos de coordenadas polares  $(\theta, r)$  serão dadas por (STRACK, 1989):

$$\Psi = \frac{W}{2\pi} \theta \tag{26}$$

De acordo com a Figura 8,  $r = |z - z_w|$ , onde  $z_w$  é a coordenada do ponto de perda/ganho e  $z$  é um ponto qualquer, ambos no plano complexo. Considerado a equação (25), o potencial complexo em  $z$  será:

$$\Omega(z) = \frac{W}{2\pi} \ln(z - z_w) + C_w \tag{27}$$

em que  $C_w$  é uma constante. O ponto de injeção/extração é singular em seu ponto de definição  $z_w$ .



**Figura 8** – Ponto de extração ou injeção.  
**Figure 8** – Point source/sink

**4.2 DIPOLO**

É constituído de um ponto de extração e outro de injeção de mesma vazão  $W$  e separados por uma distância  $\delta$ . O centro do dipolo é definido como sendo o ponto médio  $z_d = x_d + iy_d$  da linha que separa os dois polos. A inclinação do eixo do dipolo em relação à abscissa é definida como  $\beta$ . O potencial complexo em um ponto  $z$  é dado por:

$$\Omega(z) = \frac{W}{2\pi} \left[ \ln\left(z - \left(z_d + \frac{\delta}{2} e^{i\beta}\right)\right) - \ln\left(z - \left(z_d - \frac{\delta}{2} e^{i\beta}\right)\right) \right] \tag{28}$$

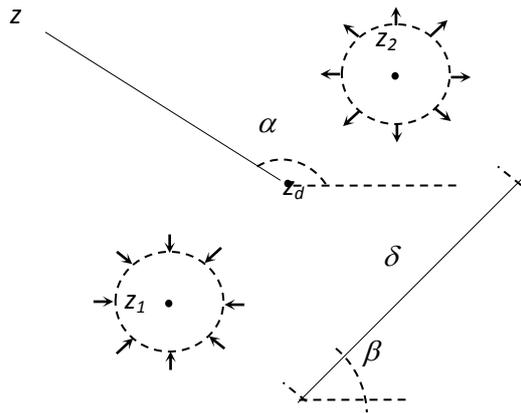


Figura 9 – Dipolo.  
Figure 9 – Dipole.

$$\Omega(z) = \lim_{\substack{W \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \frac{W\delta}{2\pi} \left[ \frac{\ln(z - (z_d + \frac{\delta}{2} e^{i\beta})) - \ln(z - (z_d - \frac{\delta}{2} e^{i\beta}))}{\delta} \right] \quad (30)$$

Desenvolvendo o limite, encontra-se a derivada da função logarítmica, o que leva à equação (32), que é o potencial complexo para o dipolo.

$$\Omega(z) = \frac{se^{i\beta}}{2\pi} \left[ -\frac{d}{dz_d} \ln(z - z_d) \right] \quad (31)$$

$$\Omega(z) = \frac{se^{i\beta}}{2\pi(z - z_d)} \quad (32)$$

Assim como o ponto de injeção/extração, o dipolo é singular em seu ponto de definição  $z_d$ .

### 4.3 LINHA DE INJEÇÃO/EXTRAÇÃO

Elementos lineares que extraem (ou acrescentam) água em um aquífero, como um rio ou drenagem, são modelados por linhas de injeção/extração. Uma linha de injeção/extração (Figura 10), de comprimento  $L$ , pode ser representada por um conjunto de pontos de injeção/extração alinhados e distribuídos uniformemente entre os pontos  $z_1$  e  $z_2$ .

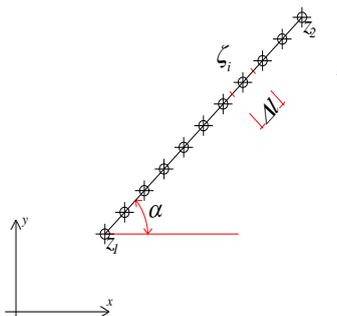


Figura 10 – Linha de injeção/extração, coordenadas locais.

Por definição, a vazão do dipolo é inversamente proporcional à distância entre eles, de forma que a multiplicação da vazão pela distância seja um número finito ( $s$ ), mesmo que infinitamente próximos, então:

$$\lim_{\substack{W \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} W\delta = s \quad (29)$$

Conforme a relação  $\Delta z_0 = \delta e^{i\beta}$ . Considerando a condição (29) temos o potencial complexo:

Figure 10 – Line sink/source.

Considerando o número de pontos de injeção/extração infinitamente grande ao longo do segmento de reta finito, com a taxa de vazão finita, o potencial complexo em um ponto qualquer do domínio, é dado pela soma dos efeitos de cada ponto ao longo da linha, conforme a equação (27):

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^m \frac{W_j}{2\pi} \ln(z - \zeta_j) \quad (33)$$

em que  $W_j$  é a vazão e  $\zeta_j$  a coordenada no plano complexo do  $j$ -ésimo ponto de injeção/extração. Pode-se escrever o somatório em função de uma taxa de extração/injeção  $\sigma$  [ $L^3T^{-1}L^{-1}$ ] ao longo da linha, ou seja, cada  $W_i$  será distribuído em um trecho  $\Delta l$ , conforme a equação:

$$\sigma = \frac{W_i}{\Delta l} \Rightarrow W_i = \sigma \Delta l \quad (34)$$

Considerando o sistema de coordenadas locais, apresentado na Figura 11:

$$Z = \frac{z - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} \quad \Gamma = \frac{\zeta - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} \quad (35)$$

Sobre a linha:

$$-1 \leq Z \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \Gamma \leq 1; \quad -\frac{L}{2} \leq l \leq \frac{L}{2}.$$

No limite, em que  $m \rightarrow \infty$  e  $\Delta l \rightarrow 0$ , a equação (33) pode ser reescrita como:

$$\Omega(z) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - \zeta) dl \quad (36)$$

Como  $d\zeta = e^{i\alpha} dl$ , podemos escrever a equação em termos de uma integral complexa.

$$\Omega(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\alpha} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln(z - \zeta) d\zeta \quad (37)$$

Substituindo as variáveis  $z$  e  $\zeta$  por suas respectivas coordenadas locais, conforme as equações (35), transformação ilustrada na Figura 11, obtém-se:

$$\Omega(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\alpha} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)(Z - \Gamma)\right] d\zeta \quad (38)$$

Da definição  $d\zeta = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)d\Gamma$ , como

$$\Omega(z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ (Z+1)\ln(Z+1) - (Z-1)\ln(Z-1) + 2\ln\left[\frac{(z_2 - z_1)}{2}\right] - 2 \right\} \quad (41)$$

A função logarítmica não é definida em  $x = 0$ . Entretanto  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ . Assim, as expressões  $(Z+1)\ln(Z+1)$  e  $(Z-1)\ln(Z-1)$  são definidas nos extremos da linha possuindo valor nulo (HAITJEMA, 1995).

#### 4.4 LINHA DUPLA

A linha dupla é obtida pelo somatório de infinitos dipolos orientados transversalmente ao longo de uma reta finita - Figura 12. A formulação para a linha dupla pode ser obtida a partir do somatório do potencial complexo do dipolo. Fazendo o número de dipolos sobre a linha crescer infinitamente tem-se:

$$\Omega(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{s e^{i\beta}}{2\pi(z - \zeta_i)} \quad (42)$$

em que  $\beta$  é o ângulo de orientação do dipolo. Definindo  $\lambda$  como a função de distribuição do esforço  $s$  sobre a linha, tem-se:

$$\lambda_j = \frac{s_j}{\Delta l} \Rightarrow s_j = \lambda_j \Delta l \quad (43)$$

O dipolo encontra-se orientado perpendicularmente à linha de integração então:

$z_2 - z_1 = Le^{i\alpha}$ , logo:

$$d\zeta = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)d\Gamma \Rightarrow \frac{L}{2}d\Gamma = e^{-i\alpha}d\zeta \quad (39)$$

Então:

$$\Omega(z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \int_{-1}^1 \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)(Z - \Gamma)\right] d\Gamma \quad (40)$$

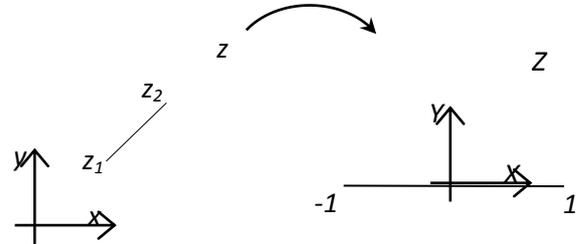


Figura 11 – Transformação de coordenadas globais para locais.

Figure 11 – Global and local coordinates.

Resolvendo a integral, com  $Z$  constante, e aplicando os limites de integração, temos o potencial complexo para a linha de injeção/extração (STRACK, 1989):

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{i\beta} = e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = ie^{i\alpha} \quad (44)$$

Substituindo as variáveis e integrando (42), ao longo da linha, obtém-se:

$$\Omega(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda(\zeta) e^{i\alpha}}{2\pi(z - \zeta)} dl \quad (45)$$

Transformando  $d\zeta = e^{i\alpha} dl$

$$\Omega(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\lambda(\zeta)}{2\pi(z - \zeta)} d\zeta \quad (46)$$

Considerando as coordenadas locais ilustradas na Figura 11, tem-se:

$$\Omega(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda(\Gamma)}{2\pi(Z - \Gamma)} d\Gamma \quad (47)$$

Introduzindo a função complexa  $\lambda = \lambda(Z)$ , analítica para todo  $Z$  (com possível exceção em pontos singulares) e real ao longo do elemento, ou seja:

$$\Im \lambda = 0; -1 \leq X \leq 1; Y = 0 \quad (48)$$

podemos reescrever o potencial complexo na forma:

$$\Omega = -\frac{\lambda(Z)}{2\pi} i \ln \frac{Z-1}{Z+1} - \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda(Z) - \lambda(\Gamma)}{Z - \Gamma} d\Gamma \quad (49)$$

O integrando é analítico em  $Z = \Gamma$ . Isso pode ser visto pela expansão de  $\lambda(Z)$  por Série de Taylor em torno de  $Z = \Delta$ . A integral de uma função analítica é analítica, o que significa que o segundo termo de equação (49) também é analítico para todos os valores de  $Z$  para o qual  $\lambda(Z)$  é analítica. Representando essa função por  $p(Z)$ , o potencial complexo para a linha dupla será dado por (STRACK, 1989):

$$\Omega(Z) = \frac{\lambda(Z)}{2i\pi} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + ip(Z) \quad (50)$$

Como a integral é analítica,  $p(Z)$  é analítica e garante que o potencial complexo tende a se anular no infinito. Adotando-se funções polinomiais para aproximar  $\lambda$  e, como no infinito  $\ln \frac{Z-1}{Z+1} \rightarrow -2\left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} \dots\right)$ , o polinômio de correção  $p$  deverá ser de uma ordem menor que o polinômio  $\lambda$ , garantindo que o potencial  $\Phi$  tenha comportamento  $Z^{-1}$  no infinito.

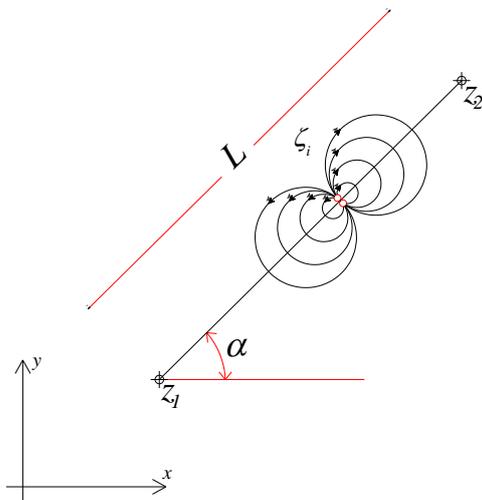


Figura 12 – Linha Dupla no plano complexo.  
Figure 12 – Line Doublet.

### 5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A Figura 13 apresenta o problema conceitual, que contém os elementos hidrogeológicos:

ponto de referência, poço, rio, inhomogeneidade retangular e lagoa, dispostos ao longo do corte AA', que corresponde ao eixo x.

Os parâmetros físicos e localização dos elementos hidrogeológicos são definidos como:

- **Ponto Referência:** Localização[L]:  $x_{\text{referência}} = 0$ ; Carga Hidráulica[L]:  $h_0 = 100$ ; Condutividade Hidráulica[LT<sup>-1</sup>]:  $K_{\text{meio}} = 1,0$
- **Poço:** Localização[L]:  $x_p = 4000$ ; Vazão[L<sup>3</sup>T<sup>-1</sup>]:  $W = 1500$
- **Rio:** Localização[L]:  $x_{\text{rio}} = 10000$ ; Drenagem específica [L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>]:  $\sigma = 5,0$ ; Comprimento do rio[L]:  $L_r = 100$
- **Inhomogeneidade:** Localização das bordas[L]:  $x_1 = 12000$ ;  $x_2 = 13000$ ; Condutividade Hidráulica:  $K_{\text{ino}} = 1,2K_{\text{meio}}$
- **Lago Circular:** Localização centro [L]:  $x_L = 17000$ ; Raio[L]:  $R = 500$ ; Taxa de Recarga[LT<sup>-1</sup>]:  $N = 7,5 \times 10^{-3}$

De acordo com o princípio da superposição, a variação do potencial de descarga devido a cada elemento no exemplo pode ser analisada separadamente.

Considerando que no ponto de referência é nula a influência do poço, do rio e do lago, tem-se:

- Para o poço, o potencial de descarga é expresso pela equação:

$$\Phi = \Re\{\Omega\} = \frac{W}{2\pi} \ln|z - z_w| + C_w \quad (51)$$

A constante  $C_w$  é obtida impondo o potencial nulo no ponto de referência.

$$C_w = -\frac{1500}{2\pi} \ln|0 - 4000| = -1980,1$$

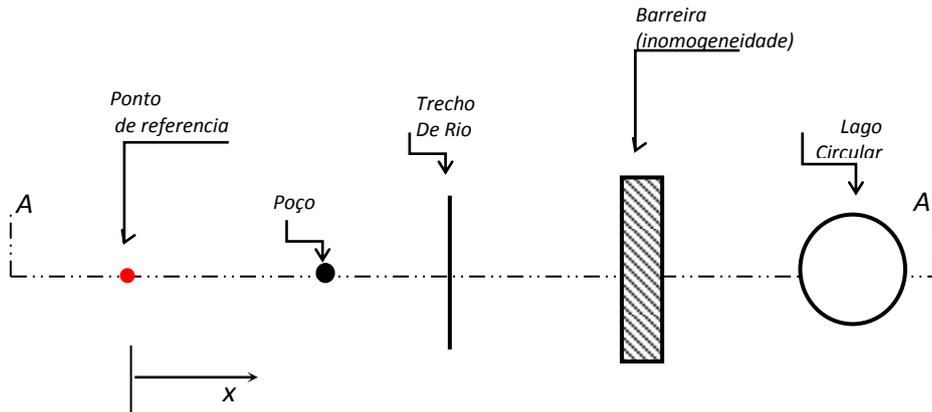
Em um ponto qualquer ao longo do eixo x, o potencial de descarga devido ao elemento poço conforme a Figura 14, será dado por:

$$\Phi = 238,7 \ln|x - 10000| - 1980,1$$

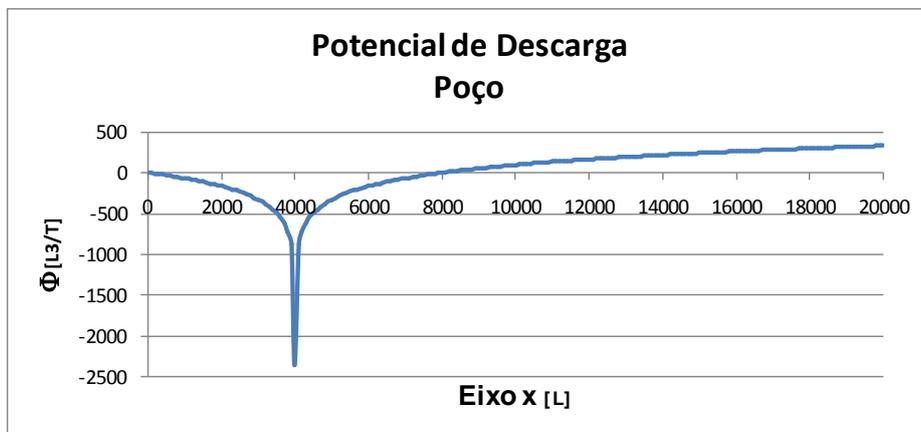
Para o rio, pela definição do logaritmo complexo

$$\ln \frac{Z-1}{Z+1} = \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + i\theta = \ln|Z-1| - \ln|Z+1| + (\theta_2 - \theta_1) i$$

(52)



**Figura 13** – Representação esquemática da aplicação.  
**Figure 13** – Example hydrogeological elements.

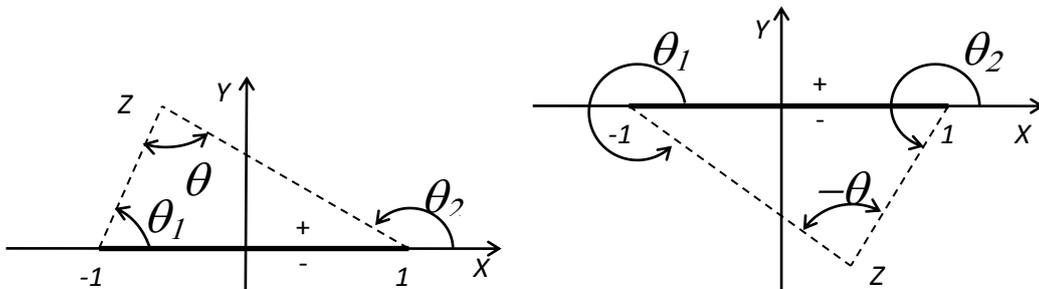


**Figura 14** – Potencial de Descarga devido ao poço.  
**Figure 14** – Discharge Potential (well).

É necessário orientar o segmento de rio (linha de extração/injeção). Consideraremos como parte positiva, o lado esquerdo ao percorrer o segmento do ponto inicial para o final. Em coordenadas locais, obtemos graficamente as

relações apresentadas na Figura 15. Observa-se que . De acordo com a equação (41), o potencial de descarga devido ao elemento trecho de rio é dado por:

$$\Phi = \Re\{\Omega(z)\} = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ -X \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + Y\theta + \ln|Z^2 - 1| + 2 \ln \frac{L}{2} - 2 \right\} \quad (53)$$



**Figura 15** – Orientação de segmento de reta em coordenadas locais ao nos aproximarmos do segmento pelo lado direito (-) e esquerdo (+).

**Figure 15** – Definitions of angles and orientations. Right side (-) and Left side (+).

Ao longo do eixo x o valor da coordenada local Z será:

$$Z = -i \frac{2(x - x_0)}{L} \Rightarrow \begin{cases} X = \Re\{Z\} = 0 \\ Y = \Im\{Z\} = -\frac{2(x - x_0)}{L} \end{cases} \quad (54)$$

O potencial de descarga do elemento trecho de rio será dado, conforme a Figura 16, por:

$$\Phi = 39,8 \left\{ -\frac{x - 10000}{25} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2500}{x - 10000} \right) + \ln \left| -\left( \frac{x - 10000}{50} \right)^2 - 1 \right| + 5,8 \right\} - 4552,3 \quad (55)$$

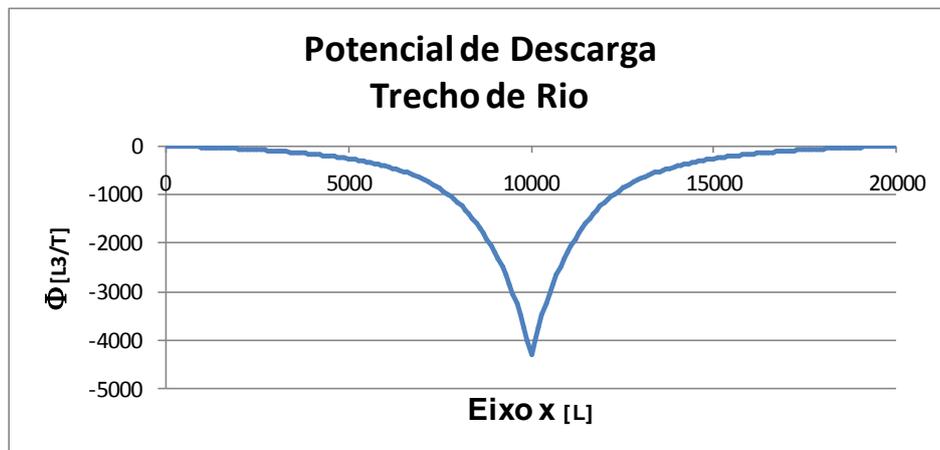


Figura 16 – Potencial de Descarga devido ao rio.  
Figure 16 – Discharge Potential (stream).

- Para a *inogeneidade*, cada linha do contorno será modelada por uma linha dupla, sendo o potencial complexo dado pela equação (50).

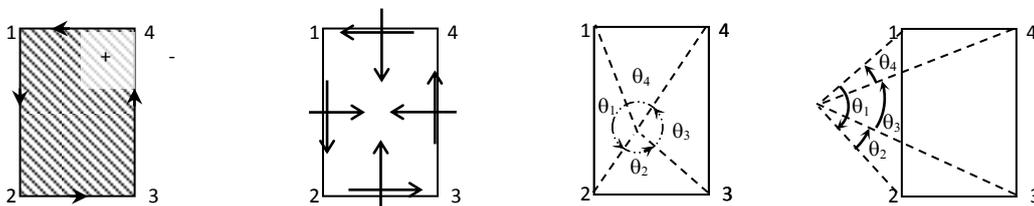
$$\Omega(Z) = \frac{\lambda}{2i\pi} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + ip(Z) \quad (56)$$

Considerando o esforço  $\lambda$ , referente à diferença do potencial de descarga no ponto imediatamente externo e interno à *inogeneidade*, como constante ao longo de toda a borda do elemento, o polinômio  $p$  de correção será igual a zero. O potencial de descarga é dado pela parte real do potencial complexo (equação 50), portanto:

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi} \theta \quad (57)$$

A *inogeneidade* é um polígono fechado no plano complexo. Ao percorrer o polígono no sentido anti-horário, os eixos locais Y sempre terão sua parte positiva apontando para o interior do polígono, de acordo com a Figura 17. Para pontos internos, o polígono  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi$  e para pontos externos,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$ . Tem-se:

$$\left. \begin{matrix} A_{ld} = 0 & z \in D^- \\ A_{ld} = 1 & z \in D^+ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Phi = \begin{cases} \lambda & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases} \quad (58)$$



**Figura 17** – Inomogeneidade retangular.  
**Figure 17** – Retangular inhomogeneity.

Como o esforço é constante ao longo da borda da inomogeneidade, para pontos externos do polígono o valor do potencial de descarga é nulo e para pontos internos o valor é igual ao esforço

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \Rightarrow \Phi = \lambda \Lambda_{id}(z) \quad (59)$$

O esforço  $\lambda$  é determinado a partir das condições de contorno ao longo da borda da inomogeneidade. A carga hidráulica e a descarga perpendicular à borda são contínuas e o potencial de descarga é descontínuo devido à mudança de condutividade hidráulica:

$$\phi^+ = \phi^- \quad (60)$$

$$Q_n^+ = Q_n^-$$

$$\frac{\Phi^+}{\Phi^-} = \frac{K^+}{K^-} \quad (61)$$

O valor do esforço ou salto será:

$$\lambda = \Phi^+ - \Phi^- = \frac{K^+ - K^-}{K^-} \Phi^- \quad (62)$$

A expressão acima indica que o salto é proporcional ao valor do potencial de descarga na parte imediatamente exterior à inomogeneidade. Como o salto depende do valor do potencial externo, acrescenta-se o *potencial de referência*.

A equação do potencial devido à *inomegeneidade* será:

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi} \theta + \Phi_0 \quad (63)$$

Ressalta-se que, caso seja considerado o potencial de referência nulo (à semelhança dos elementos anteriores), a expressão do salto também se anulará, não evidenciando a influência da inomogeneidade sobre a parte interna do polígono que a circunscreve.

Pelas equações (58), (59) e (63) para pontos externos à inomogeneidade  $\Phi = \Phi_0$ , e para pontos

internos  $\Phi = \left( \frac{K^+ - K^-}{K^-} + 1 \right) \Phi_0$ , conforme Figura

18. No caso estudado:

$$\Phi = 5000 \quad p/x < 12000; \text{ou}; x > 13000$$

$$\Phi = 6000 \quad p/12000 \leq x \leq 13000$$

• Para a *lago circular*, no seu interior define-se uma recarga constante  $N$  [ $LT^{-1}$ ]. O fluxo subterrâneo abaixo do disco ( $r < R$ ) é governado pela equação de Poisson, enquanto fora do disco ( $r > R$ ), a equação governante é a de Laplace.

$$0 \leq r \leq R \quad \nabla^2 \Phi = -N \quad (64)$$

$$R < r < \infty \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

Integrando sobre o círculo de raio  $R$  e definindo a função  $G_{Lago}$  como:

$$G_{Lago} = -\frac{1}{4}(r^2 - R^2) \quad 0 \leq r \leq R$$

$$G_{Lago} = -\frac{R^2}{4} \ln\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \quad R < r < \infty \quad (65)$$

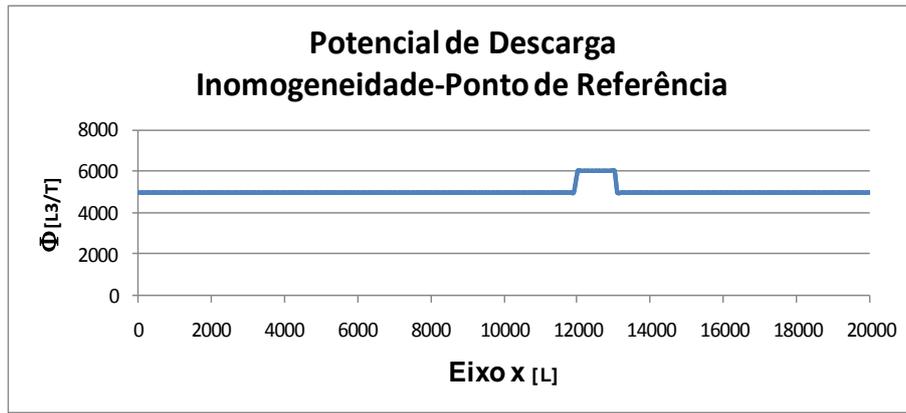
Tem-se que o potencial de descarga pode ser escrito como:

$$\Phi = NG_{Lago} + C_{lago} \quad (66)$$

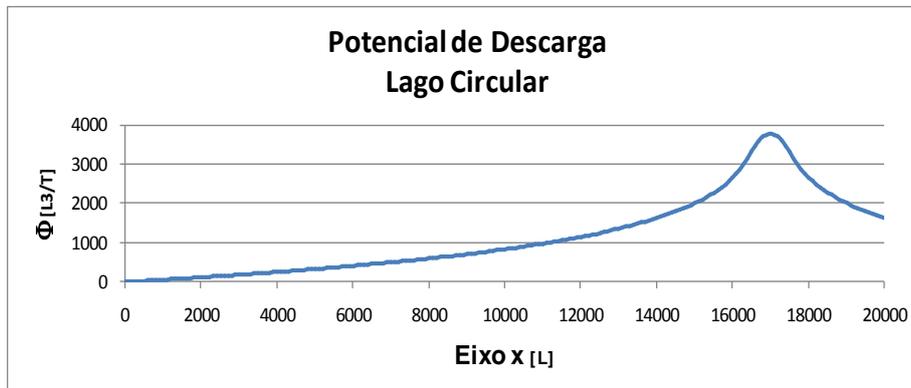
Sendo  $C_{lago}$  a constante de integração determinada tomando-se nulo o potencial no ponto de referência. Para o caso estudado, aplicando a equação (66) com o potencial de descarga nulo, temos que  $C_{lago} = 3305,9$  e o potencial de descarga, conforme a Figura 19, será:

$$\Phi = -1,8x10^{-3} [(17000 - x)^2 - 500^2] + 3305,9 ; |x - 17000| < 500 . \text{Área interna ao lago.}$$

$$\Phi = -62500 \ln\left(\frac{(17000 - x)^2}{2,5x10^5}\right) + 3305,9 ; |x - 17000| > 500 . \text{Área externa ao lago.}$$



**Figura 18** – Potencial de Descarga devido a inhomogeneidade.  
**Figure 18** – Potential discharge (inhomogeneity).



**Figura 19** – Potencial de Descarga devido ao lago circular.  
**Figure 19** – Discharge potential (circular lake).

A solução final em termos do potencial de descarga é obtida pela superposição dos gráficos, ilustrada na Figura 20. Aplicando a relação (7) obtém-se a variação da carga hidráulica, ilustrada na Figura 21.

## 6 MONTAGEM DO SISTEMA COM ESFORÇOS DESCONHECIDOS

Todos os elementos do exemplo desenvolvido na seção anterior apresentam uma equação linear para o potencial de descarga. À exceção de uma constante, o potencial de descarga resulta da multiplicação de um esforço ( $\xi$ ) por uma função de influência ( $\Lambda$ ), dependente da geometria do elemento e do ponto analisado,  $\Phi = \xi \Lambda(z)$ , em que:

$\xi = W$  para poços

$\xi = \sigma$  para trechos de rio

$\xi = \lambda$  para bordas de inhomogeneidade

$\xi = N$  para lagos

Nos casos em que o valor de  $\xi$  é conheci-

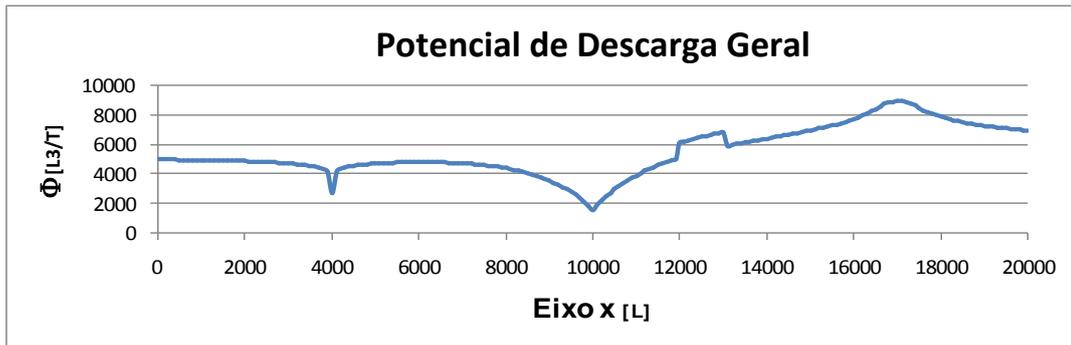
$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{M_{dl}} \Phi_{V_m} + \sum_{n=1}^{N_{dl}} \Phi_n(z) + C \Rightarrow \sum_{n=1}^{N_{dl}} \Phi_{U_n}(z) + C = \Phi(z) - \sum_{m=1}^{M_{dl}} \Phi_{V_m}(z) \quad (67)$$

do, a contribuição referente ao potencial de descarga é facilmente calculada em qualquer ponto do domínio (salvo em pontos singulares). Esses elementos são chamados de Elementos Tipo V.

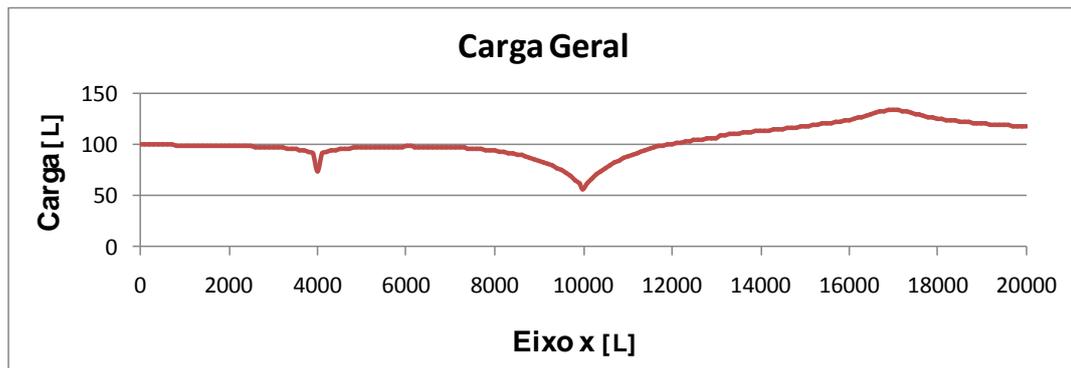
Nos casos em que somente o potencial de descarga no ponto de controle é conhecido, o efeito individual (de cada elemento) naquele ponto é indeterminado, uma vez que resulta da superposição de todos os elementos – incluindo o próprio. Esses elementos são chamados de Elementos Tipo U.

Para determinar cada incógnita do modelo é necessário definir um ponto de controle, onde o potencial de descarga é conhecido. Para poços, devido à singularidade matemática em sua localização, adota-se um ponto suficientemente próximo, geralmente na borda do revestimento do poço. Para trechos de rios e de inhomogeneidades pode-se adotar o ponto médio do segmento.

O potencial de descarga para um ponto qualquer  $z$ , pode ser calculado como:



**Figura 20** – Superposição dos Potenciais de Descarga dos elementos.  
**Figure 20** – Superposition of solutions (Discharge potential).



**Figura 21** – Solução final (Carga Hidráulica).  
**Figure 21** – Final solution (hydraulic head).

A constante  $C$  é a soma de todas as constantes dos elementos  $V$  e  $U$ . Evidentemente, isso impõe a necessidade de uma equação adicional para que o sistema linear seja determinado, daí a necessidade de imposição

arbitrária de um ponto de referência.

Aplicando a equação (67) a cada ponto de controle e para o ponto de referência, obtém-se um sistema de  $N_{el}+1$  equações lineares. Exemplificado para  $N_{el} = 3$ :

$$\begin{bmatrix} A_1(z_1) & A_2(z_1) & A_3(z_1) & 1 \\ A_1(z_2) & A_2(z_2) & A_3(z_2) & 1 \\ A_1(z_3) & A_2(z_3) & A_3(z_3) & 1 \\ A_1(z_0) & A_2(z_0) & A_3(z_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_1) \\ \Phi_2 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_2) \\ \Phi_3 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_3) \\ \Phi_0 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_0) \end{bmatrix} \quad (68)$$

em que  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são os pontos de controle e  $z_0$  é o ponto de referência.

referência.

No exemplo de aplicação, considerou-se que as influências do poço, rio e lagoa eram nulas no ponto de referência (as constantes foram determinadas para satisfazer essa condição). Somente a inhomogeneidade foi responsável pela introdução do potencial no ponto de referência.

Os valores das funções  $A_j(z_j)$  são determinados diretamente a partir das equações demonstradas anteriormente, entretanto para os elementos linha dupla (bordos da inhomogeneidade) é necessário observar que para um ponto de controle sobre a borda de inhomogeneidade  $z_j$ :

$$\lambda_j = \frac{K_{inomo} - K_{meio}}{K_{meio}} \Phi_j \quad (69)$$

Com a montagem do sistema de equações e a junção de todas as constantes em  $C$ , não é necessário adotar essa condição. A preocupação resume-se em local adequadamente o ponto de

Introduzindo a equação (67):

$$\lambda_j = \frac{K_{inomo} - K_{meio}}{K_{meio}} \left( \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z_j) + \sum_{n=1}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z_j) + C \right) \quad (70)$$

e desenvolvendo:

$$\lambda_j \frac{K_{meio}}{K_{inomo} - K_{meio}} = \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z_j) + \sum_{n=1}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z_j) + C \quad (71)$$

Dentre todos os elementos tipo  $U$ , existirá um para o qual  $n = j$ , ou seja,  $U_j = \lambda_j \Lambda_j(z)$ , o que

$$\lambda_j \left( \frac{K_{meio}}{K_{inomo} - K_{meio}} - \Lambda_j(z_j) \right) = \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z_j) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z_j) + C \quad (72)$$

Lembrando que  $\Lambda_j(z_j) = 1$ , conforme equação (58).

## 7 DISCUSSÃO

O Método de Elementos Analíticos resgata um arcabouço matemático dedicado ao problema de fluxo subterrâneo, que teve sua importância minimizada a partir da popularização dos métodos numéricos como Diferenças Finitas e Elementos Finitos.

Ao focar o desenvolvimento matemático nas características e elementos hidrogeológicos que influenciam o escoamento subterrâneo, o AEM permite uma investigação científica apurada e focada na física do fenômeno.

O exemplo conceitual, o qual desenvolve a formulação dos principais elementos analíticos ao longo de um corte vertical, demonstra com sucesso a viabilidade da superposição de soluções em termos do potencial de descarga e a consequente obtenção de uma linha de carga hidráulica adequada ao modelo estudado.

Em linhas gerais, o desenvolvimento matemático dos elementos analíticos para aplicações bidimensionais é similar ao apresentado aqui. Entretanto, existem variantes importantes, como por exemplo: o uso de polinômios para representar os saltos ao longo de cada elemento (aqui tratamos esses saltos como constantes); e o surgimento de elementos em cadeia, fechados (lagos poligonais) ou abertos (trechos de rios). Outras técnicas como

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao DAAD (serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico) pelo suporte financeiro, que viabilizou o desenvolvimento do trabalho.

## REFERÊNCIAS

a sobrespecificação e superblocos (STRACK, 2003) possuem papel relevante na precisão e eficiência do método.

## 8 CONCLUSÃO

A análise unidimensional do fluxo subterrâneo possibilita comprovar a viabilidade da técnica da superposição de soluções na construção da linha de carga hidráulica.

O AEM mostra-se promissor como ferramenta de análise e construção de cenários para escoamento subterrâneo, sobretudo em aquíferos regionais, que devido às suas dimensões exigem uma carga computacional excessiva pela abordagem de métodos numéricos como o MDF e MEF. O AEM, portanto, apresenta-se como importante alternativa para modelagem.

Para o Método de Elementos Analíticos (AEM), a influência de cada elemento hidrogeológico sobre a solução é destacada e possibilita ao pesquisador o uso de ferramentas matemáticas que estabelecem nexos diretos entre a modelagem do elemento hidrogeológico (elemento analítico) e seu comportamento físico.

Os aspectos do AEM apresentados colocam o método como importante alternativa para a modelagem de escoamento subterrâneo, não no sentido de substituição dos métodos numéricos mais tradicionais, mas de complementação devido ao enfoque diferenciado dado ao problema.

- BATISTA, J. A. N. **Modelagem de Escoamento em Aquíferos Longos Baseado no Método dos Elementos Analíticos**. Sao Carlos : 2006. 211p. Tese Doutorado em Ciências da Engenharia Ambiental- EESC USP.
- BEAR, Jacob. **Dynamics of Fluids in Porous Media**. New York: Dover, 1972. 764p.
- FRANCA ALENCAR, M. N. **Interpolação por splines para modelação de Inomogeneidades no Método de Elementos Analíticos** - Implementação por Programação Orientada a Objetos. Sao Carlos : 2008. 302p. Tese Doutorado em Ciências da Engenharia Ambiental- EESC USP.
- GOMES, C. C. **Método dos Elementos Analíticos para Modelagem Matemática de Fluxo Hídrico Subterrâneo Regional**. Fortaleza: 2002, 123p. Tese Doutorado em Hidráulica, Universidade Federal do Ceará.
- HAITJEMA, H. M. **Analytical Element Modeling of Groundwater Flow**. London: Academic Press, 1995. 394p.
- SPIEGEL, R. M.. **Variáveis Complexa**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1972.
- STRACK, O. D. L. **Groundwater Mechanics**. North Oaks: SC Inc, 1989. 732p.
- STRACK, O. D. L. Theory and Applications of the Analytic Element Method. Rev. **Geophys.**, 41(2), 1005, 2003.
- STRACK, O. D. L.; FRANCA ALENCAR, M. N.; WENDLAND, E. Teoria e Aplicações do Método de Elementos Analíticos. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 13, p. 5-15, 2009.
- WENDLAND, E., BATISTA, J. A. N. e SCHULZ, H. E.. Coupling one-dimensional recharge solution to analytic element model: an approach for coastal aquifers in Brazil. In: C.T. Miller; M.W. Farthing; W.G. Gray; G.F. Pinder. (Org.). **Computational Methods in Water Resources**. 1 ed. Amsterdan: Elsevier, 2004, v. 1, p. 405-414.